

# 函数的单调性（1）

娄超

## 一、教学目标：

- 1、目标：掌握函数单调性的概念，单调性的判断方法；
- 2、重点：函数的单调性概念、判断方法；
- 3、难点：综合运用知识进行定义法证明和理解。

## 二、教学过程：

### （一）一、课前复习（预习完成）

#### 课前复习：

（1）函数作图的基本步骤：\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_。

（2）完成以下两个函数的作图。（给出列表和网格坐标系）

(i)  $y = 2x$                       (ii)  $y = \frac{1}{x}$

### （二）新课引入：

#### 1、观看视频：

2、导语：几千年来，“黄河治理”都关乎国家命脉，近期黄河流域连续降雨，水位上升，给周围群众造成严重安全隐患，党和国家及地方各级政府都非常重视。从市河务局了解到，9月底开始，黄河水位持续在5000（立方米/秒）以上，防汛形势依然严峻。

### （三）知识新授

#### 1、概念形成. 根据课前作图分析（教师引导学生统一回答）：

（1）正比例函数 $y = 2x$ 的图像从左向右呈现\_\_\_\_\_（上升或下降）趋势，即当自变量由小变大时，函数值逐渐\_\_\_\_\_（增大或减小），即 $y$ 随 $x$ 的增大而\_\_\_\_\_（增大或减小）；

(2) 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像, 在 $(-\infty, 0)$ 上, 函数值 $y$ 随着 $x$ 的增大而\_\_\_\_\_ (增大或减小), 在 $(0, +\infty)$ 上, 函数值 $y$ 随着 $x$ 的增大而\_\_\_\_\_ (增大或减小).

2、如何用不等式符号表示“ $y$ 随 $x$ 的增大而增大”, “ $y$ 随 $x$ 的增大而减小”? (教师引导学生统一回答, 对照作图分析)

对于函数 $y = f(x)$ , 其中 $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ .

(1) “ $y$ 随 $x$ 的增大而增大”可以表述为: 如果 $x_1 < x_2$ , 则 $y_1$ \_\_\_\_ $y_2$ ;

(2) “ $y$ 随 $x$ 的增大而减小”可以表述为: 如果 $x_1 < x_2$ , 则 $y_1$ \_\_\_\_ $y_2$ .

3、概念生成. (学生朗读, 教师板书关键词)

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$ , 且 $I \subseteq D$ :

(1) 如果对任意 $x_1, x_2 \in I$ , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称 $y = f(x)$ 在 $I$ 上是\_\_\_\_\_ (也称在 $I$ 上\_\_\_\_\_);

(2) 如果对任意 $x_1, x_2 \in I$ , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称 $y = f(x)$ 在 $I$ 上是\_\_\_\_\_ (也称在 $I$ 上\_\_\_\_\_);

两种情况下, 都称函数在 $I$ 上具有单调性 (当 $I$ 为区间时, 称 $I$ 为函数的单调区间, 也可称为单调增区间或单调减区间).

4、强调关键词: 任意、区间、大小。

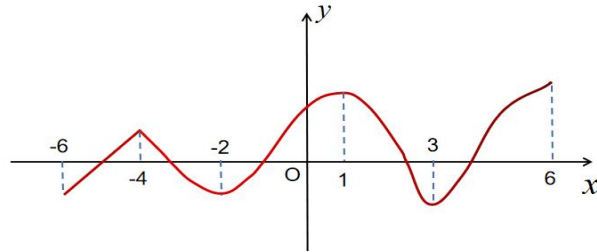
5、概念深化. (分组讨论, 形成结论, 说明理由)

(1) 对于二次函数 $f(x) = x^2$ , 因为 $f(-1) < f(2)$ 成立, 因此 $f(x)$ 在定义域内单调递增. 这个说法是否正确? 为什么?

(2) 反比例函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为\_\_\_\_\_, 单调递减区间为\_\_\_\_\_.

师生共同小结：

- 1、单调性反映的是函数在某个区间上的性质.
- 2、多个单调性相同的几个区间不能用“ $\cup$ ”连接，可以通过“和”，也可以通过“，”连接.
- 6、尝试与发现.（教师引导学生回答）.



如图，定义在 $[-6, 6]$ 上的函数 $y = f(x)$ ，在 $[-6, -4]$ 上是增函数，在 $[-4, -2]$ 上是减函数，在 $[-2, 1]$ 上是\_\_\_\_函数，在 $[1, 3]$ 上是\_\_\_\_函数，在 $[3, 6]$ 上是\_\_\_\_函数.

函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间（简称单增区间）为：

\_\_\_\_\_

函数 $y = f(x)$ 的单调递减区间（简称单减区间）为：

\_\_\_\_\_

师生小结：单调性，单调区间的开闭，单调区间并集避免。

7、最值和最值点.（对照以上尝试与发现，形成概念）

一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$ ，且 $x_0 \in D$ ：如果对于任意 $x \in D$ ，都有 $f(x) \leq f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 的最大值为 $f(x_0)$ ，而 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的最大值点；如果对于任意 $x \in D$ ，都有 $f(x) \geq f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 的最小值为 $f(x_0)$ ，而 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的最小值点. 最大值和最小值统称为最值，最大值点和最小值点统称为最值点.

（四）知识应用

例 1. 判断函数 $f(x) = 3x + 5$ ， $x \in [-1, 6]$ 的单调性，并求这个函数的最值.

思路引领：1、图像法；2、代数法

教师板书，形成规范过程。

变式训练：（学生独立作答，实物投影展示，规范格式）

求证：函数 $f(x) = -2x$ 在 $R$ 上是减函数。

（五）探索研究（独立探究，对照预习和教材引导）

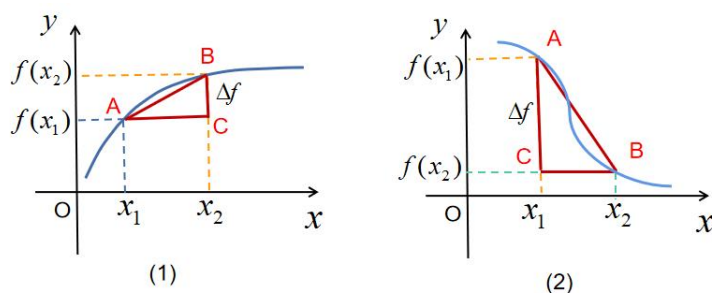
我们知道，两点确定一条直线，在平面直角坐标中，这一结论当然也成立。

一般地，给定平面直角坐标系中的任意两点 $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ . 若记 $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ .

(1) 当 $x_1 \neq x_2$ 时，直线 $AB$ 的斜率为\_\_\_\_\_；当 $x_1 = x_2$ 时，直线 $AB$ 的斜率\_\_\_\_\_.

(2) 直线的斜率反映了直线相对于 $x$ 轴的\_\_\_\_\_.

(3) 通过刚才的例题能够发现，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 单调递增的充要条件为 $k$ \_\_\_\_0，单调递减的充要条件为 $k$ \_\_\_\_0.



(4) 观察函数图像上任意两点连线斜率的符号与函数单调性之间的关系，可以得到：

(i) 函数递增的充要条件是其图像上任意两点连线的斜率\_\_\_\_\_0；

(ii) 函数递减的充要条件是其图像上任意两点连线的斜率\_\_\_\_\_0；

(5) 形成结论:

一般地, 若  $I$  是函数  $y = f(x)$  的定义域的子集, 对任意  $x_1, x_2 \in I$ , 且  $x_1 \neq x_2$ ,

记  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (即  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ), 则:

(1)  $y = f(x)$  在  $I$  上是增函数的充要条件是  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  在  $I$  上恒成立.

(2)  $y = f(x)$  在  $I$  上是减函数的充要条件是  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$  在  $I$  上恒成立.

一般地, 当  $x_1 \neq x_2$  时, 称  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  为函数  $y = f(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  ( $x_1 < x_2$  时) 或  $[x_2, x_1]$  ( $x_2 < x_1$  时) 上的平均变化率.

(6) 利用平均变化率继续板书例 1 的第二种方法.

(六) 知识应用 (独立完成, 实物投影总结方法, 对照几种方法的共性和区别)

例 2、求证: 函数  $y = \frac{1}{x}$  在区间  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上都是减函数.

七) 不忘初心: 如果我们将开头 9 月 29 日 (作为第一天, 即  $x = 1, 1 \leq x \leq 25$ ) 及以后后黄河水位的变化趋势近似模拟为二次函数  $y = -50x^2 + 1000x + 200$ , 当水位开始下降时, 防汛工作人员和志愿者可以适当轮休, 请根据所学内容判断哪天开始他们可以轮休与家人团聚.

学生思考完成, 教师提问, 学生补充.

四、课堂小结与作业.

1、思想方法: 数形结合、特殊一般

2、知识: 单调性的判断、理解

3、情感: 家国情怀

4、作业.