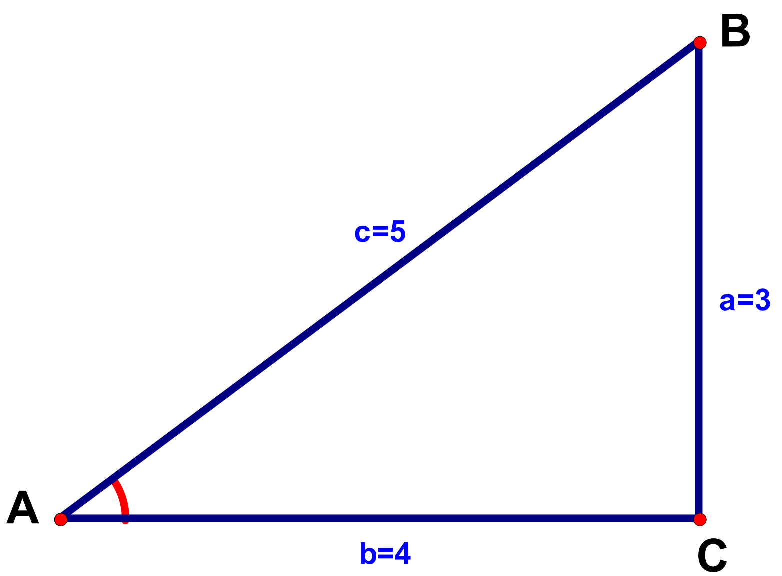
三角函数的定义

复习 引入

1.在初中我们是如何定义锐角A的正弦、余弦、正切的?



2.在平面直角坐标系中，锐角A的始边、终边落在哪里?

探究 新知

一、 任意角 α 的正弦、余弦、正切：

1、求解步骤：

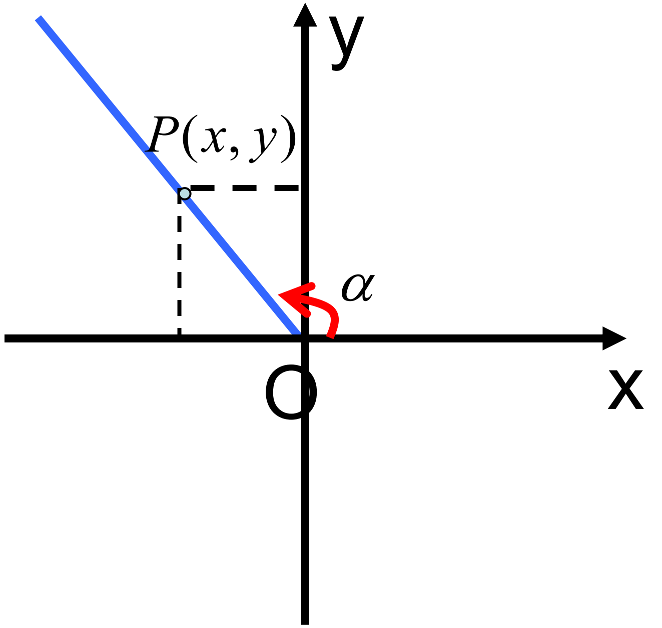
（1）以角α 的顶点o为坐标原点，以角α的始边为x轴正方向，建立直角坐标系 xoy

（2）在角α终边上任取异于原点的一点$P(x, y)$

设 $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

（3）$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$　　$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$　　$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

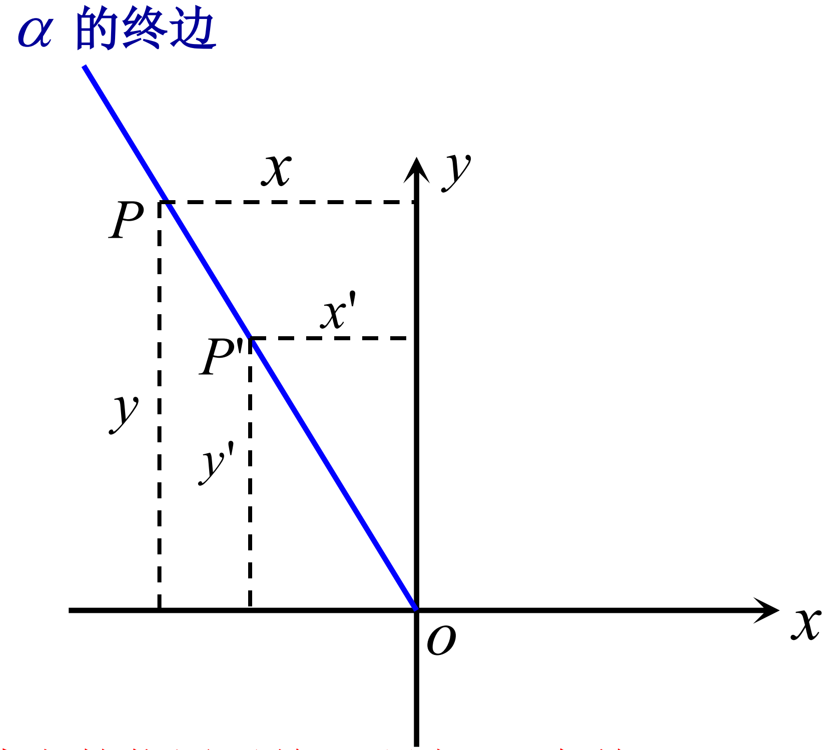
$\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$　　$\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$　　$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$



定终边、取一点、算比值

2、如果改变点P在终边上的位置，这三个比值会改变吗？

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$ 与 $\sin\alpha=\dfrac{y'}{r'}$ 相等吗？



（1）由三角形相似，可得 $\dfrac{|y|}{r}=\dfrac{|y'|}{r'}$

（2）P、P' 在同一象限，y 与 y' 符号相同

$$\therefore\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'}$$

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y'}{r'}=\cdots\cdots=$ 定值，与点 P 在终边上的位置无关， 只与 α 有关

同理，$\cos\alpha$ 、 $\tan\alpha$ 与点在终边上的位置无关，只与 α 有关

例1，已知角α的终边过点P(2，-3),求α的六个三角函数值。

解：因为 $x=2, y=-3$, 所以 $r=\sqrt{13}$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{3\sqrt{13}}{13} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2} \qquad \cot\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}$$

练习，A1

变式1，角 α 的终边过点 $P(2a,-3a)(a<0)$ **呢？**

变式2，角 α 的终边过点 $P(2a,-3a)(a\neq 0)$**呢？**

变式3，角 α 的终边过点 $P(a,-3)$ **,** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}a$ $(a\neq 0)$ **呢？**

例2，利用三角函数的定义求下列各角的三角函数值：

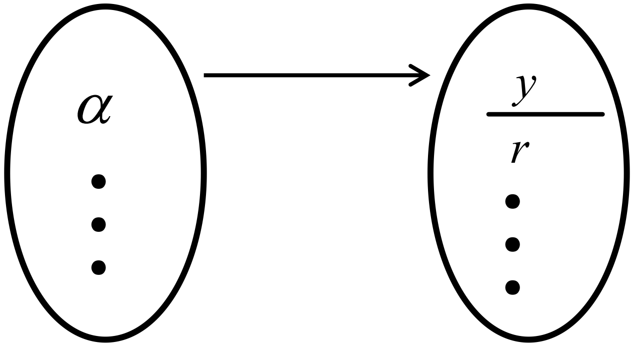
（1） 0 （2） $\frac{\pi}{2}$ （3） π （4） $\frac{3\pi}{2}$

练习, B5:

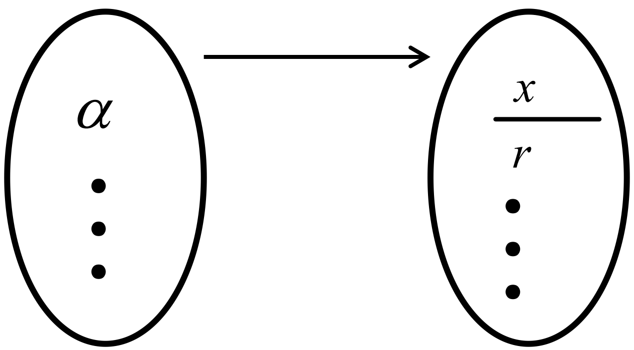
已知角 α 的终边落在直线 $y=2x$ 上，求 $\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\tan\alpha$ 的值.

二、 三角函数的定义:

$f:\alpha \to \sin\alpha$



$f:\alpha \to \cos\alpha$



三角函数的定义域

R

R

$\left\{\alpha \middle| \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

我们把正弦、余弦，正切、余切，正割及余割都看成是以角为自变量，以比值为函数值的函数，以上六种函数统称三角函数.

课堂小结

1.会求任意角的三角函数值

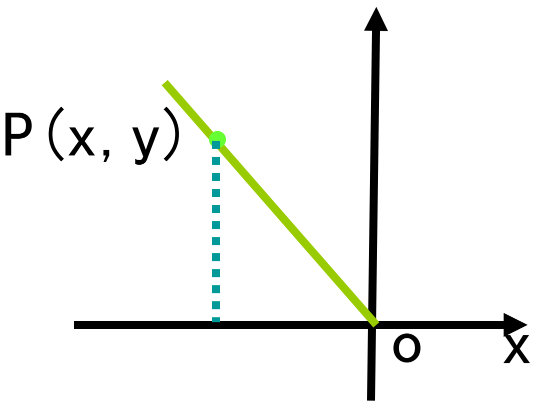
2.理解三角函数的定义

3.识记一些特殊角的三角函数值

布置作业

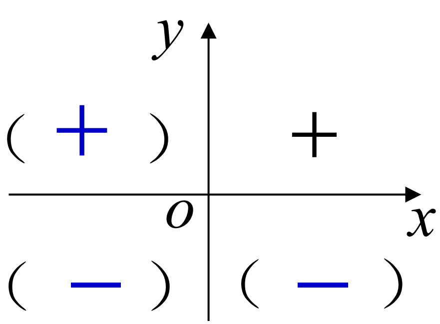
习题1-2A，1、5

三、 三角函数值在各象限的符号：

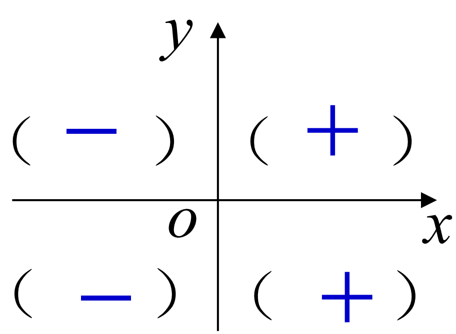


$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

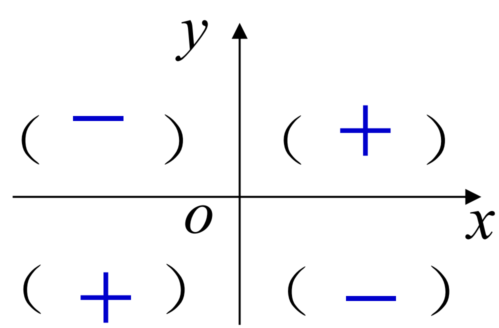
$$\cot\alpha = \frac{x}{y} \qquad \sec = \frac{r}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$



sin α



cos α



tan α

口诀“一全正，二正弦，三正切，四余弦.”

练习：　确定下列三角函数值的符号：

（1）$\cos 250°$（2）$\tan(-672°)$（3）$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

解：（1）因为 $250°$ 是第三象限角，所以 $\cos 250° < 0$ ；

（2）因为 $\tan(-672°)$ = $\tan(48° - 2\times 360°) = \tan 48°$，
而 $48°$ 是第一象限角，所以 $\tan(-672°) > 0$ ；

（3）因为 $-\frac{\pi}{4}$ 是第四象限角，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0$.

练习　确定下列三角函数值的符号

$\cos\frac{16}{5}\pi$　　$\sin(-\frac{4\pi}{3})$　　$\tan(-\frac{17}{8}\pi)$

—　　＋　　—

例3 求证：当且仅当下列不等式组成立时，角 θ 为第三象限角.

$$\begin{cases} \sin\theta < 0 & ① \\ \tan\theta > 0 & ② \end{cases}$$

证明：

因为①式$\sin\theta < 0$ 成立,所以 θ 角的终边可能位于第三或第四象限，也可能位于y 轴的非正半轴上；

又因为②式$\tan\theta > 0$ 成立，所以角θ 的终边可能位于第一或第三象限.

因为①②式都成立，所以角θ 的终边只能位于第三象限.于是角 θ 为第三象限角.

反过来请同学们自己证明.