必修1　　第三章 函数

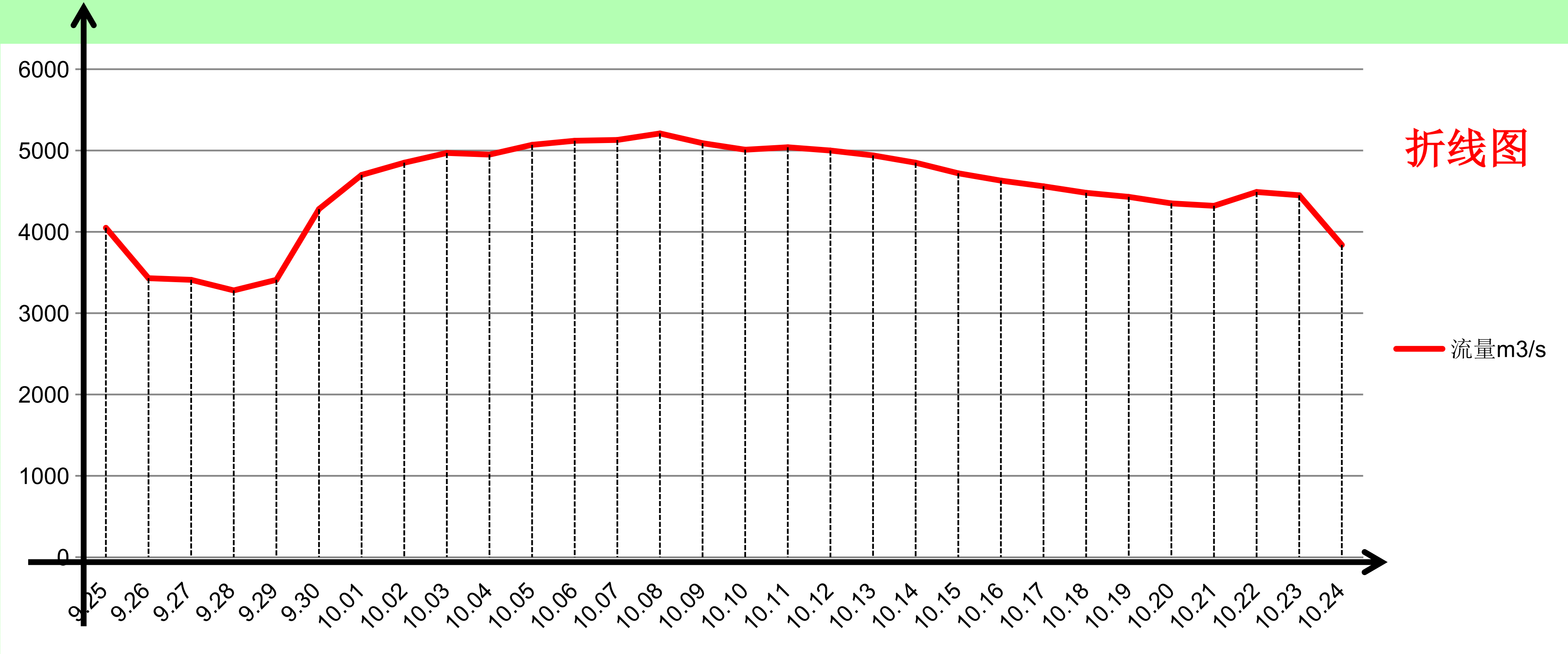
3.1.2 函数的单调性（1）

东营市第一中学　　娄超

情景引入

几千年来，“黄河治理”都关乎国家命脉，近期黄河流域连续降雨，水位上升，给周围群众造成严重安全隐患，党和国家及地方各级政府都非常重视。从市河务局了解到，9月底开始，黄河水位持续在5000（立方米/秒）以上，防汛形势依然严峻。

以下为9月25日至10月24日黄河水位流量的折线图.



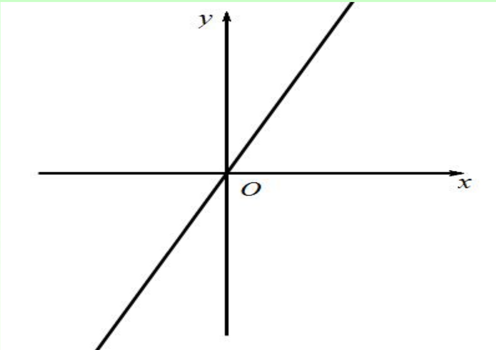
如果我们想要更为准确的分析水位随时间的变化趋势，就要进一步建模构造函数.

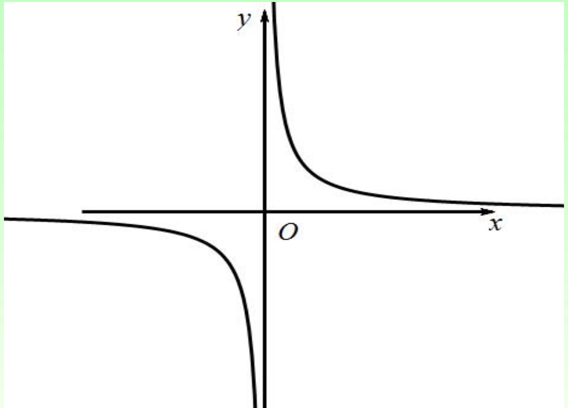
函数单调性概念

1、根据课前预习以及作图分析：

（1）正比例函数$y=2x$的图像从左向右呈现<u>上升</u>（上升或下降）趋势，即当自变量由小变大时，函数值逐渐<u>增大</u>（增大或减小）,即y随x的增大而<u>增大</u>（增大或减小）；

（2）反比例函数$y=\frac{1}{x}$的图像，在$(-\infty,0)$上，函数值y随着x的增大而<u>减小</u>（增大或减小），在$(0,+\infty)$上，函数值y随着x的增大而<u>减小</u>（增大或减小）.





形

函数单调性概念

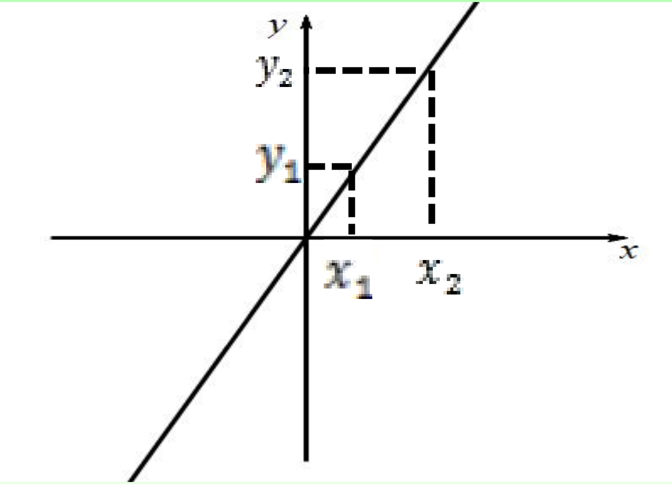
数学抽象

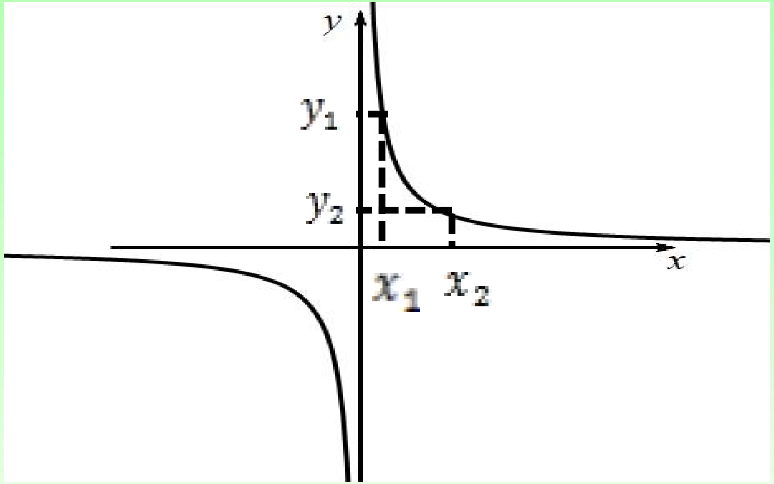
2、如何用不等式符号表示“y随x的增大而增大”,“y随x的增大而减小”?

对于函数$y=f(x)$，其中$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$.

（1）“y随x的增大而增大”可以表述为：如果$x_1<x_2$，则y_1 __<__ y_2;

（2）“y随x的增大而减小”可以表述为：如果$x_1<x_2$，则y_1 __>__ y_2.





数

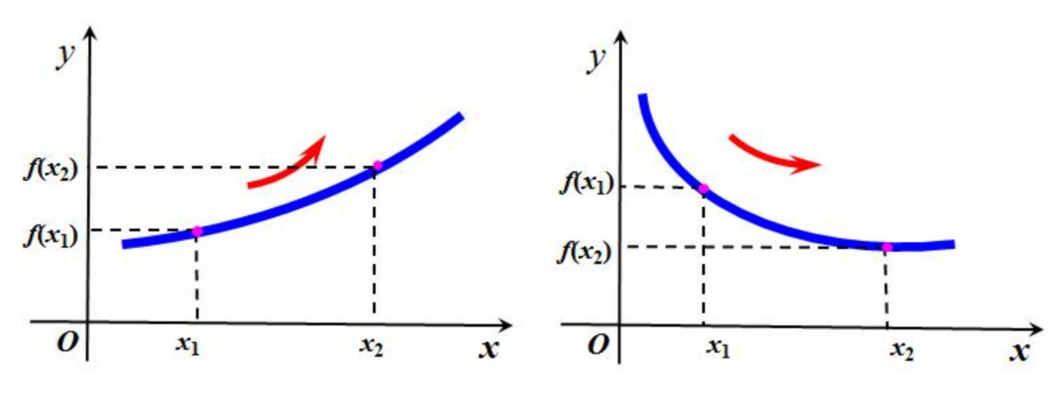
函数单调性概念

一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为 D，且 $I\subseteq D$：

（1） 如果对任意x_1，$x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在 I 上是增函数（也称在 I 上单调递增）；

（2） 如果对任意x_1，$x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在 I 上是减函数（也称在 I 上单调递减）；

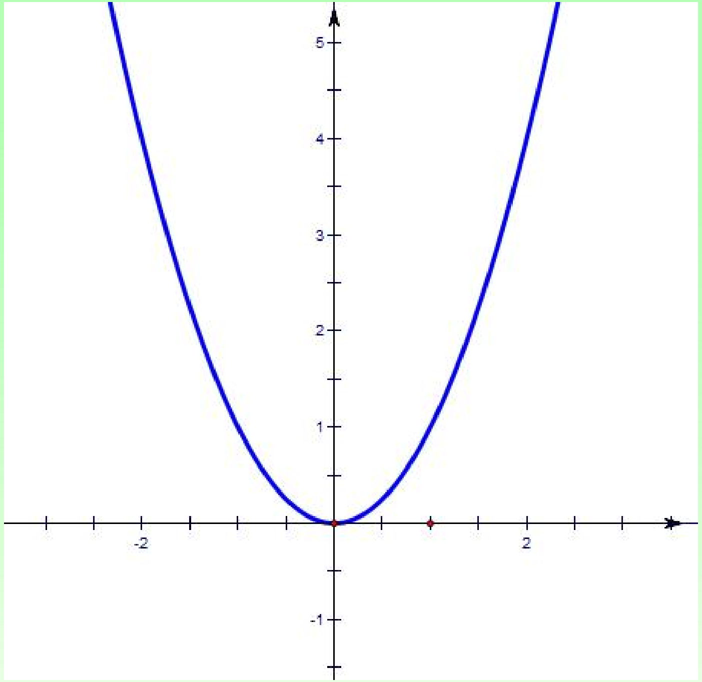
两种情况下，都称函数在 I 上具有单调性（当 I 为区间时，称 I 为函数的单调区间，也可称为单调增区间或单调减区间）.



函数单调性概念

（1）辨析：对于二次函数$f(x)=x^2$，因为$f(-1)<f(2)$成立，因此$f(x)$在定义域内单调递增。这个说法是否正确？为什么？

取值的“任意性”．

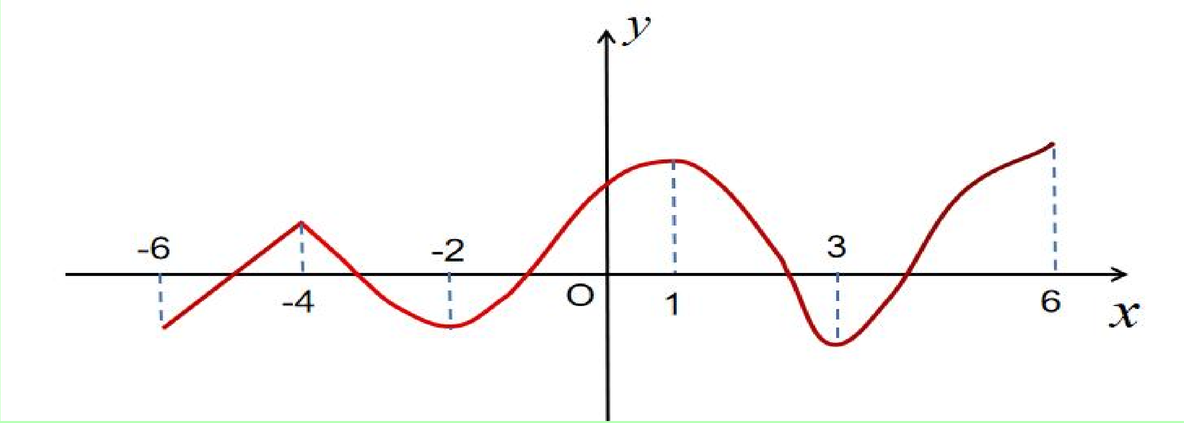


（2）思考与讨论：反比例函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\underline{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$，单调递减区间为 $\underline{(-\infty,0)和(0,+\infty)}$.

1、单调性反映的是函数在某个区间上的性质.

2、多个单调性相同的几个区间不能用“∪”连接，可以通过“和”，也可以通过“,”连接.

尝试与发现



一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为D，且$x_0\in D$：如果对于任意 $x\in D$，都有$f(x)\le f(x_0)$，则称$f(x)$的最大值为$f(x_0)$，而x_0称为$f(x)$的最大值点；如果对于任意$x\in D$，都有$f(x)\ge f(x_0)$，则称$f(x)$的最小值为$f(x_0)$，而x_0称为$f(x)$的最小值点.最大值和最小值统称为最值，最大值点和最小值点统称为最值点.

知识应用

逻辑推理、数学运算

例 1.判断函数$f(x)=3x+5$，$x\in[-1,6]$的单调性，并求这个函数的最值.

当堂检测：

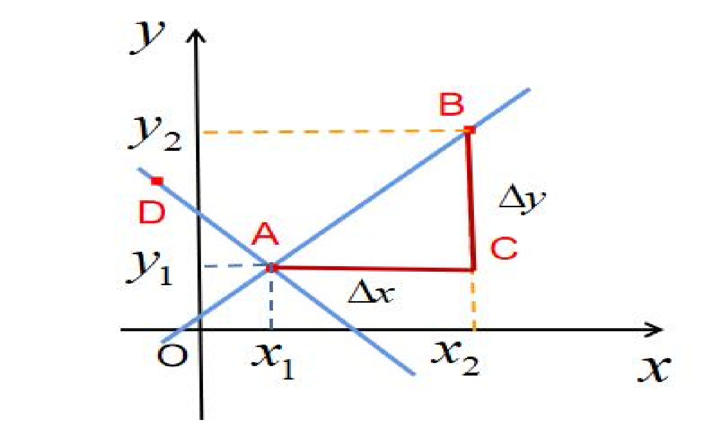
求证：函数$f(x)=-2x$在 R 上是减函数.

一次函数的单调性

斜率和平均变化率

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 记$\Delta x=x_2-x_1$，

$\Delta y=y_2-y_1$，$\Delta f = f(x_2)-f(x_1)$.



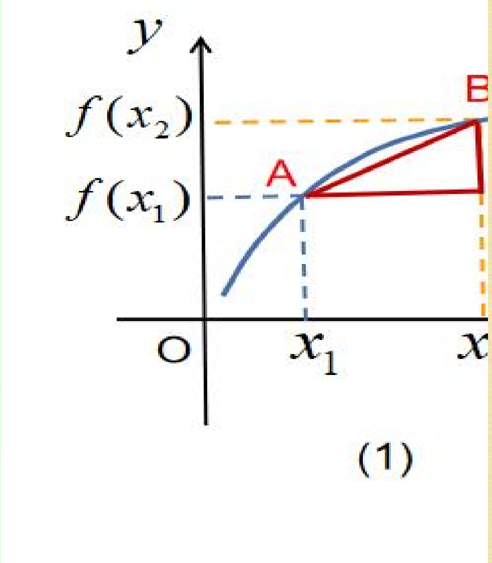
（1）当$x_1\neq x_2$时，直线AB的斜率为$\underline{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$；

当$x_1=x_2$时，直线直线AB的斜率__不存在__.

（2）直线的斜率反映了直线相对于x轴的__倾斜程度__.

（3）通过刚才的例题能够发现，一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$单调递增的充要条件为 k__>__0，单调递减的充要条件为 k__<__0.

斜率和平均变化率



拓展阅读

物理中的变化率

我们在物理中已经学习过：变化率是描述变化快慢的量．

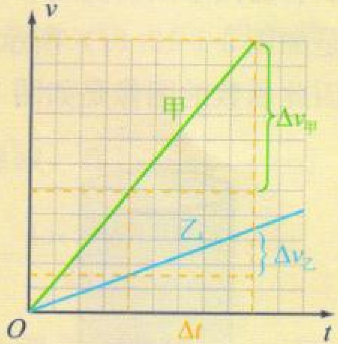
例如，速度是用来衡量物体运动快慢的，速度等于位移的变化量与发生这一变化所用时间的比值，即

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t};$$

加速度是用来衡量速度变化快慢的，加速度等于速度的变化量与发生这一变化所用时间的比值，即

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

而且，从物理中我们还知道，由物体的速度—时间图像，可看出加速度的有关信息．如图所示，如果甲、乙两物体的速度—时间图像都是直线，则由图中的信息可以看出，Δt 相等时，$\Delta v_{甲}>\Delta v_{乙}$，从而甲的速度变化更快，即变化率更大，因此甲的加速度更大．



你注意到了吗？物理中的这个变化率与我们所说的函数的平均变化率其实是一回事．

观察函数图像上任意两

得到：

（i）函数递增的充要条件是其图像上任意两点连线的斜率________0;

（ii）函数递减的充要条件是其图像上任意两点连线的斜率___<_____0;

斜率和平均变化率

一般地，若 I 是函数$y=f(x)$的定义域的子集，对任意x_1，$x_2 \in I$，且$x_1 \neq x_2$，记$y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（即$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$），则：

（1）$y=f(x)$在 I 上是增函数的充要条件是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ___>___ 0在 I 上恒成立.

（2）$y=f(x)$在 I 上是减函数的充要条件是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ___<___ 0在 I 上恒成立.

一般地，当$x_1 \neq x_2$时，称 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 为函数 $y=f(x)$在区间$[x_1，x_2]$（$x_1<x_2$时）或$[x_2，x_1]$（$x_2<x_1$时）上的平均变化率.

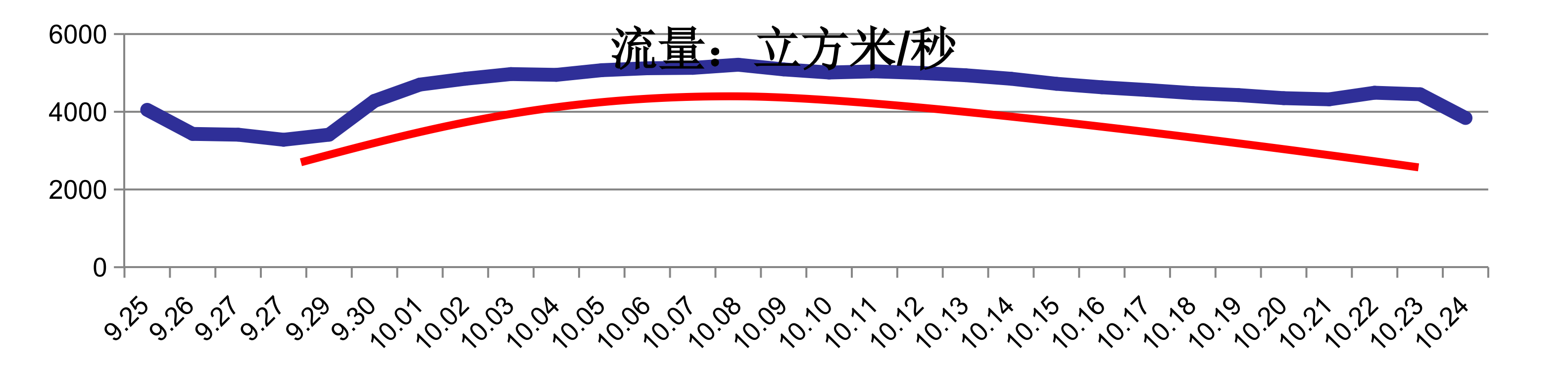
例 2.求证：函数$y=\frac{1}{x}$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上都是减函数.

定义法和平均变化率法的区别

证明 设$x_1\neq x_2$，那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}.$$

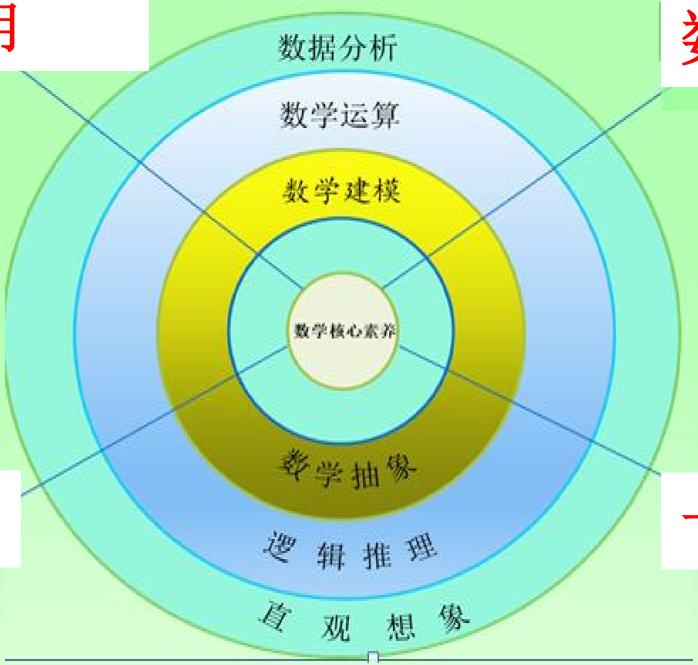
如果x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，则$x_1x_2>0$，此时$\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，所以函数在$(-\infty,0)$上是减函数．同理，函数在$(0,+\infty)$上也是减函数.



如果我们将“引入”部分中，9 月 29 日（作为第一天，即$x=1$，则$1\leq x\leq 25$)）及以后黄河水位的变化趋势近似模拟为二次函数$y=-50x^2+1000x+200$，当水位开始下降时，防汛工作人员和志愿者可以适当轮休，请根据所学内容判断哪天开始他们可以轮休与家人团聚.

函数单调性的理解及应用

数形结合



家国情怀

一般与特殊

本节课中斜率和平均变化率的概念也反映了大单元教学的理念.

感谢您的参与，谢谢！

作业布置：课本102页A1，2、3，B1,2，3