实数指数幂及其运算（1）

【引例】“都灵裹尸布”传说的真伪

都灵裹尸布

基督教圣物，一块有人面容的麻布，传说当耶稣被钉在十字架上死亡之后，曾被此麻布包裹，因其血迹清晰纪录着耶稣当时的面容而闻名于世。1988 年，科学家曾以碳 14 的半衰期测定其年代，结果震惊世界！

碳 14 半衰期测定年代的原理：当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 会按确定的规律衰减，大约经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间为“半衰期”，由此可推测：

经过$1\times 5730=5730$年,机体内碳 14变为原来的 $(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$;

经过$2\times 5730=11460$年,机体内碳 14变为原来的 $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$;

经过$3\times 5730=17280$年,机体内碳 14变为原来的 $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$;

经过$\frac{1}{2}\times 5730=2865$年,机体内碳 14变为原来的 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$;

经过$\frac{1957}{5730}\times 5730=1957$年,机体内碳 14变为原来的 ________ 其中1957为耶稣被钉在十字架上至测量时的年数 .

如果我们将此结果计算出来和实际测量的结果 0.92014 相比较，就可以断定该传说的真伪了。

【学习目标】

【知识与技能】1.理解分数指数幂的概念；2.初步掌握有理指数幂的计算和化简.

【过程与方法】通过复习初中所学的整数指数幂，用归纳类比的思想完成有理指数幂的学习.

【情感态度价值观】体会通过类比、归纳认识事物、学习知识的方法.

【学习过程】…

一、整数指数幂

1、正整数指数幂的概念、性质及运算

(1)、a的n次幂：$a^n=\underbrace{a\bullet a\bullet\cdots\bullet a}_{n个}$，其中$a$叫做幂的____,$n$叫做幂的____，规定$a^1=$____ .

(2)、正整数指数幂的性质：

$(1) a^m\bullet a^n=$______ $(2) (a^m)^n=$______ $(3) \frac{a^m}{a^n}=$______$(m>n,a\neq 0)$ $(4)\ (ab)^m=$______

2、整数指数幂

$(1) a^0=$____　　　$(2) a^{-n}=$____　　$(a\neq 0,n\in N^*)$

通过性质(3) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 验证规定的合理性.

(1) $m=n$时，$\_\_\_\_\_\_=\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=\_\_\_\_\_\_(a\neq 0)$;

(2) $m=0$ 时，$\_\_\_\_\_\_=\frac{a^0}{a^n}=a^{0-n}=\_\_\_\_\_\_(a\neq 0)$.

【巩固练习】1.$(\frac{1}{2})^{-4}=\_\_\_\_$　2.$(-8)^0=\_\_\_$　3.$(2x)^{-3}(x\neq 0)=\_\_\_$

二、方根

1、n 次方根及性质

复习：如果$x^2=a(x^3=a)$,则x叫做a的二次方根(三次方根).

推广：如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in N^*$.求 a 的 n 次方根，叫做把 a 开 n 次方，称作开方运算.

【做一做】

(1)如果$x^2=2$,则$x=____$;如果$x^2=-2$,则x ____;(2)如果$x^3=2$,则$x=__$;如果$x^3=-2$,则$x=__$;
(3)如果$x^4=2$,则$x=____$;如果$x^4=-2$,则x ____;(4)如果$x^5=2$,则$x=__$;如果$x^5=-2$,则$x=__$.

性质归纳：

1.当n为偶数时，
1）$a>0$时,a的偶次方根有__个，分别表示为____;
2)$a=0$时,0的偶次方根为____;
3)$a<0$时,a的偶次方根在实数范围内_____.

2.当n为奇数时，
1)在实数范围内a只有一个n次方根，记为____;
2)正数的奇次方根为_________(填正数或负数);
3)负数的奇次方根为_________(填正数或负数).

注：1、$(\sqrt[n]{a})^n=\_\_\_\_,(n>1,且n\in N^*)$；2、0 的任何次方根都是 0；3、正数 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根

2、根式

定义：当$\sqrt[n]{a}$有意义的时候,$\sqrt[n]{a}$叫做根式，n叫做根指数.

【试一试】

(1)$(\sqrt[4]{2})^4=\_\_\_\_\_\_$(2)$\sqrt{2^2}=\_\_\_\_\_\_$(3)$(\sqrt[3]{-2})^3=\_\_\_\_\_$(4)$\sqrt[4]{(-2)^4}=\_\_\_\_\_\_$(5)$(\sqrt[5]{2^3})^5=\_\_\_\_\_\_$

性质归纳：

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=$____$(n>1,且n\in N^*)$　　(2) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}\_\_\_\_,当n为奇数时\\ \_\_\_\_\_,当n为偶数时\end{cases}$

【练一练 1】化简下列各式：

(1)$\sqrt[5]{(-2)^5}=$______　　(2)$\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5=$______　　(3)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=$________

三、分数指数幂

1、正分数指数幂:

观察并回答：如果借助公式$(a^m)^n=a^{mn}$可将指数幂推广到分数形式.

例如：$(\sqrt[3]{2})^3=2=(2^{\frac{1}{3}})^3$，可以得到：$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$

$(\sqrt[3]{2^2})^3=2^2=(2^{\frac{2}{3}})^3$，可以得到：$\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

(1)如果$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m=(a^{\frac{m}{n}})^n$，可以得到：_________.

(2)你得到的结论对任意的$a\in R$都成立吗？

定义：　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ $(a>0,m,n\in N^*,且\dfrac{m}{n}为既约分数)$

说明：(1).分子为幂指数，分母为根指数；

(2)分数指数幂不能用正整数指数幂定义来解释，它只是根式的一种表示形式.

2、负分数指数幂　　$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

3、0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

【练一练 2】用分数指数幂表示下列各式：

(1)$\sqrt[3]{x^2}=$_____(2)$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=$______(3)$\sqrt[4]{(a+b)^3}=$_______(4)$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}=$_______

4、有理指数幂的运算性质：　$(a>0,b>0,m,n\in Q)$

$a^ma^n=$______，$(a^m)^n=$______，$(ab)^m=$_______

四、知识应用

例 1、化简：　$\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)}$

【练习】 (1) $\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}$ (2) $\sqrt[3]{\dfrac{3y}{x}}\bullet\sqrt{\dfrac{3x^2}{y}}$ $(x>0)$

例 2、化简： $\dfrac{m+m^{-1}+2}{m^{-\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}}$

【变式 1】已知 $m^{\frac{1}{2}}-m^{-\frac{1}{2}}=3$，求值: $m+m^{-1}$ 【变式 2】 $\dfrac{m^{\frac{2}{3}}+m^{-\frac{2}{3}}-2}{m^{\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}}$

五、知识小结:

【过关检测】

1、下列等式一定成立的是( )

A. $a^{\frac{2}{3}}\bullet a^{\frac{3}{2}}=a$ B. $a^{-\frac{1}{2}}\bullet a^{\frac{1}{2}}=0$ C. $(a^3)^2=a^9$ D. $a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$

2. 化简($a^{\frac{2}{3}}\bullet b^{\frac{1}{2}}$)•(－3$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$)÷(3$a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}$)的结果是( )

A.6a B.－a C.－9a D.9a

3. 计算 $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}$=________.

4. $x>0$, 且 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ 则 $x+x^{-1}=$ ________ .

【学习反思】