东营市一中

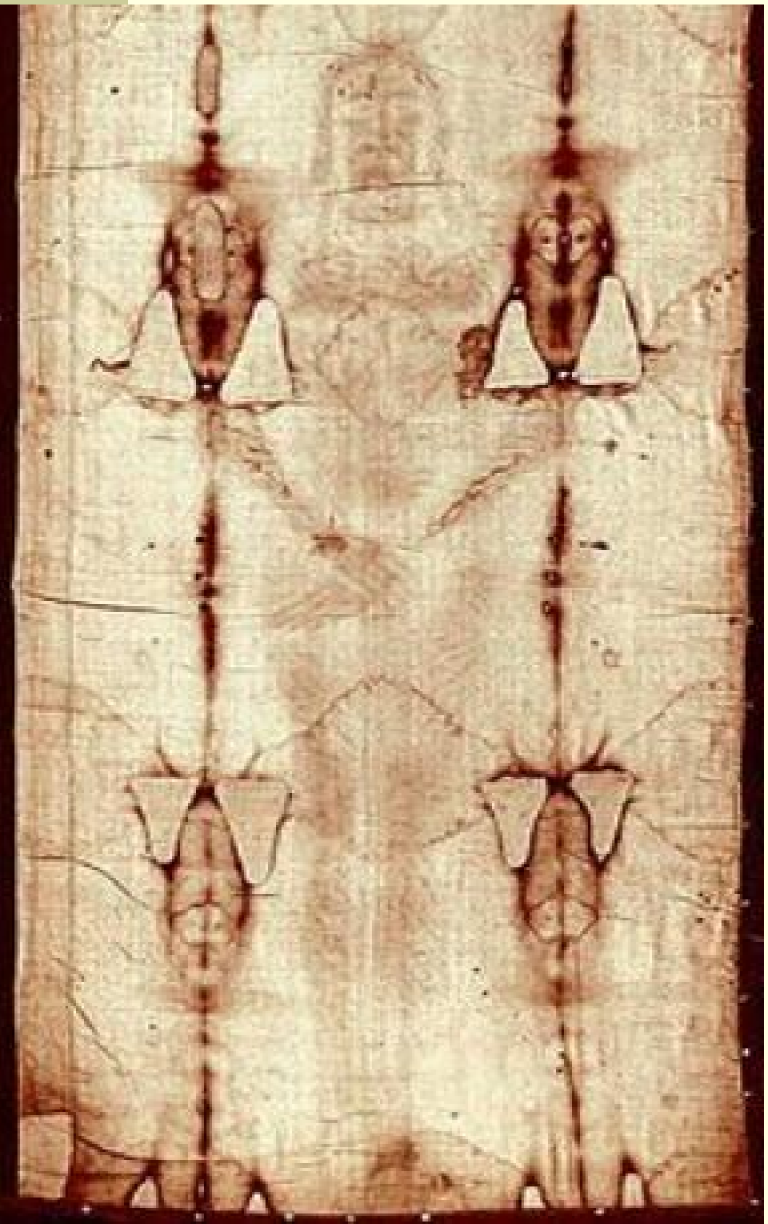
人教B版高中数学必修1

实数指数幂及其运算(1)

东营市一中 娄超

为中华英才引航
为民族伟业奠基

都灵裹尸布的传说



都灵裹尸布

基督教圣物，一块有人面容的麻布，传说当耶稣被钉在十字架上死亡之后，曾被此麻布包裹，因其血迹清晰纪录着耶稣当时的面容而闻名于世。

1988年，科学家曾以碳14的半衰期测定其年代，结果震惊世界！

测定原理：当生物死亡后，它机体内原有的碳14会按确定的规律衰减，大约经过5730年衰减为原来的一半，这个时间为“半衰期”，由此可推测得知：

经过$1\times5730=5730$年,机体内碳14变为原来的$(\frac{1}{2})^{1}=\frac{1}{2}$;

经过$2\times5730=11460$年,机体内碳14变为原来的$(\frac{1}{2})^{2}=\frac{1}{4}$;

经过$3\times5730=17280$年,机体内碳14变为原来的$(\frac{1}{2})^{3}=\frac{1}{8}$;

经过$\frac{1}{2}\times5730=2865$年,机体内碳14变为原来的$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$;

经过$\frac{1957}{5730}\times5730=1957$年,机体内碳14变为原来的$\underline{(\frac{1}{2})^{\frac{1957}{5730}}}$

其中1957为耶稣被钉在十字架上至测量时的年数.

一、 整数指数幂

1. 正整数指数幂的相关概念及性质

幂的指数

幂的底数

$$a^{n}=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}$$

a 的 n 次幂

2. 整数指数幂

(1) $a^{0}=$ <u>1</u>　　(2) $a^{-n}=$ <u>$\frac{1}{a^{n}}$</u> $(a\neq 0, n\in N^{*})$

一、整数指数幂

2. 整数指数幂

通过性质3: $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$验证规定的合理性:

$1.m=n$时，即 $\underline{\ 1\ }=\dfrac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=\underline{\ a^0\ }$

$2.m=0$时，即 $\underline{\ \dfrac{1}{a^n}\ }=\dfrac{a^0}{a^n}=a^{0-n}=\underline{\ a^{-n}\ }$

【巩固练习】

$1.(\dfrac{1}{2})^{-4}=\underline{\ 16\ }$　$2.(-8)^0=\underline{\ 1\ }$　$3.(2x)^{-3}(x\neq 0)=\underline{\ \dfrac{1}{8x^3}\ }$

二、方根

1. n次方根

如果$x^2=a(x^3=a)$,则x叫做a的二次方根(三次方根).

(1)如果 $x^2=2$,则 $x=$ ______;　如果 $x^2=-2$,则 x ______;

(2)如果 $x^3=2$,则 $x=$ ______;　如果 $x^3=-2$,则 $x=$ __;

(3)如果 $x^4=2$,则 $x=$ ______;　如果 $x^4=-2$,则 x ______;

(4)如果 $x^5=2$,则 $x=$ ______;　如果 $x^5=-2$,则 $x=$ __;

a的算术根

当n为偶数时，$x^n=a$

1) $a>0$时,a的偶次方根有 **2** 个，分别表示为 $\sqrt[n]{a},-\sqrt[n]{a}$;

2)$a=0$时,0的偶次方根为 0 ;

3)$a<0$时,a的偶次方根在实数范围内 不存在 .

当n为奇数时，$x^n=a$

1)在实数范围内a只有一个n次方根，记为 $\sqrt[n]{a}$;

2)正数的奇次方根为 正数（填正数或负数）

3)负数的奇次方根为 负数（填正数或负数）

二、方根

2.根式：

当$\sqrt[n]{a}$有意义的时候,$\sqrt[n]{a}$叫做根式，n叫做根指数.

$(1)(\sqrt[4]{2})^4=$ 2

$(2)\sqrt{2^2}=$ 2

$(3)(\sqrt[3]{-2})^3=$ -2

$(4)\sqrt[4]{(-2)^4}=$ 2

$(5)(\sqrt[5]{2^3})^5=$ 8

因此，可得以下性质：

$(1)(\sqrt[n]{a})^n=$ a $(n>1,\text{且}n\in N^*)$

$$\boxed{(2)\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a, & \text{当}n\text{为奇数时}\\ |a|, & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}}$$

练一练：$(1)\sqrt[5]{(-2)^5}$ $(2)\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5$ $(3)\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$

三、分数指数幂

1. 正分数指数幂

探究正分数指数幂的定义：

观察并回答：如果借助公式$(a^m)^n=a^{mn}$可将指数幂推广到分数形式

例如：$(\sqrt[3]{2})^3=2=(2^{\frac{1}{3}})^3$，可得：$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$.

$\sqrt[3]{2^2}=2^2=(2^{\frac{2}{3}})^3$ 可得：$\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

注：1. 分子为幂指数，分母为根指数；

2. 分数指数幂不能用正整数指数幂定义来解释，它只是根式的一种表示形式.

由此可以将正分数指数幂定义为：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\mathrm{m}}\ (a>0,m,n\in N^*,\text{且}\ \frac{m}{n}\ \text{为既约分数})$$

三、分数指数幂

2. 负分数指数幂

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0,n,m\in N^*,\text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数})$$

3. 0的指数幂： 0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义

练一练：利用分数指数幂表示下列根式

$(1)\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

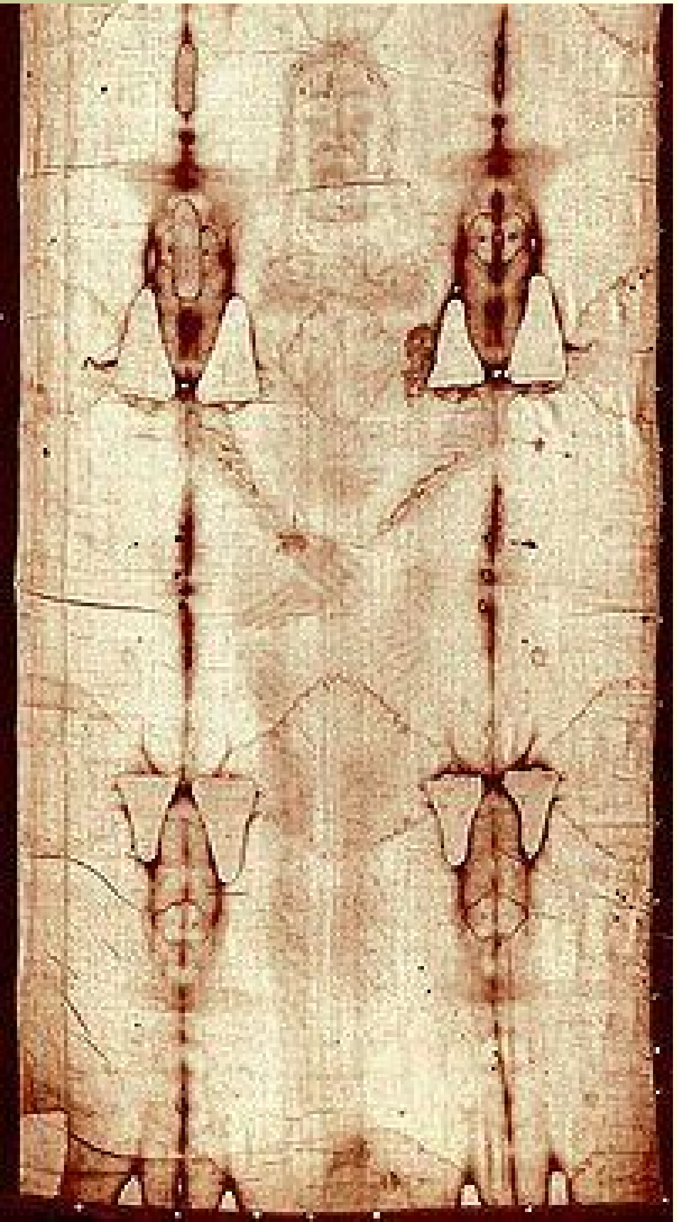
$(2)\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=a^{-\frac{1}{3}}$

$(3)\sqrt[4]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{4}}$

$(4)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{1}{6}}$

先将根式化成分数指数幂，以便能够利用指数幂的性质.

鉴定“裹尸布传说”的真伪



至此，我们可以理解表达式$(\frac{1}{2})^{\frac{1957}{5730}}$的意义了.

$$(\frac{1}{2})^{\frac{1957}{5730}} = \sqrt[5730]{(\frac{1}{2})^{1957}}$$

=0. 7892007452

而实际测量结果却为0. 92014

数学来源于生活，应用于生活。

三、分数指数幂

4. 有理指数幂及运算性质

设$a>0,b>0,m\in Q,n\in Q$

(1)$a^m a^n=a^{m+n}$;

(2)$(a^m)^n=a^{mn}$;

(3)$(ab)^m=a^m b^m$.

四、知识应用

例1、化简 $$\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}\right)}$$

四、知识应用

【变式练习1】

$$(1)\frac{4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}$$

$$(2)\sqrt[3]{\frac{3y}{x}}\bullet\sqrt{\frac{3x^2}{y}}(x>0)$$

注：1化简时先将根式化成分数指数幂，以便能够利用指数幂的性质.

2化简时注意结果形式的统一，结果不能同时含有根式和分数指数幂，也不能既含有分母又含有负指数.

例2、化简 $\dfrac{m+m^{-1}+2}{m^{-\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}}$

提示：$m=(m^{\frac{1}{2}})^2, m^{-1}=(m^{-\frac{1}{2}})^2$

$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

知识拓展：

变式1：已知 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$，求值：$a+a^{-1}$.

$(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}})^2=a+b\pm 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\ (a,b>0)$

$a-b=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})\ (a,b>0)$

变式2：$\dfrac{m^{\frac{2}{3}}+m^{-\frac{2}{3}}-2}{m^{\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}}=m^{\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}$

课堂小结

方法总结：

1. 类比、归纳；

2. 利用计算器来计算幂的值.

(1) 方根的概念和性质：　　$(n>1,\text{且 } n\in N^{*})$

$$(\sqrt[n]{a})^{n}=a,\qquad \sqrt[n]{a^{n}}=\begin{cases} a, & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \\ |a|, & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

(2)分数指数幂的定义 $(a>0, m, n\in N^{*}, \text{且 } \dfrac{m}{n} \text{ 为既约分数})$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

(3)有理指数幂的性质和运算：（$a>0, b>0, \alpha\in Q, \beta\in Q$）

(1)$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$;

(2)$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$;

(3)$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$.

作业：

1.课本89页练习A组1,3，90页练习B组1,2

2.（选做）93页习题3—1 A组1