聪明还被聪明误

在一些资料中，我经常见到这样一道题；在一次听课时，也亲眼见到老师曾作为一个典型例题。

已知$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8,\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)$的值。

错解：由$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8\\ \lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1\end{cases}$ 得$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}3a_n+\lim\limits_{n\to\infty}4b_n=8\\ \lim\limits_{n\to\infty}6a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\end{cases}$

解之得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{4}{9},\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{15}{9}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{12}{9}+\dfrac{15}{9}=3$。

其实这到没什么不妥，我们知道数列极限的四则运算法则中，a_n,b_n存在极限与

$a_n+b_n,a_n-b_n,a_n\cdot b_n,\dfrac{a_n}{b_n}$存在极限是不等价的，前者可以推出后者，后者却推不出前者。

在本题中，若仅有$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8$或 $\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1$都无法保证$a_n,b_n$极限存在，但题目中，同时出现了以上两个条件，却足可以保证a_n,b_n的极限存在，这一点作一个简单的换元就可以得到证明。