

高考递推数列通项公式的题型探究

1. 周期数列

如果数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正整数 M, T ，使得对一切大于 M 的自然数 n ，都有 $a_{n+T} = a_n$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列。

例 1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ ，求 a_n 。

解析：∵ $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ ，∴ $a_{n+2} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{a_n - 1}$ ， $a_{n+3} = 1 - \frac{1}{a_{n+2}} = 1 + a_n - 1 = a_n$ ，

即数列是以 3 为周期的周期数列。又 $a_1 = 2$ ， $a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ， $a_3 = -1$ ，

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2, & n = 3k + 1 \\ \frac{1}{2}, & n = 3k + 2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ -1, & n = 3k + 3 \end{cases}$$

2. 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1$ 且 $q \neq 0$) 的递推数列

可化为 $a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p(a_n - \frac{q}{1-p})$ ，此时 $\left\{a_n - \frac{q}{1-p}\right\}$ 是以 p 为公比， $a_1 - \frac{q}{1-p}$ 为首项

的等比数列，从而可求 a_n 。

例 2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in N^*$)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析：∵ $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ，∴ $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ ，即 $\frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2$ ，∴ $\{a_n + 1\}$ 是以 $a_1 + 1 = 2$

为首项，2 为公比的等比数列。∴ $a_n + 1 = 2^n$ ，即 $a_n = 2^n - 1$ ($n \in N^*$)。

3. 形如 $a_{n+1} = a_n + g(n)$ 的递推数列，可用求和相消法求 a_n

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$)

(I) 求 a_2, a_3 ；

(II) 求证 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ 。

解析：(I) ∵ $a_1 = 1$ ，∴ $a_2 = 3 + 1 = 4$ ， $a_3 = 3^2 + 4 = 13$ 。

(II) 由 $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$) , 得 $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$, $a_{n-1} - a_{n-2} = 3^{n-2}$,
 $a_{n-2} - a_{n-3} = 3^{n-3}$, \dots , $a_4 - a_3 = 3^3$, $a_3 - a_2 = 3^2$, $a_2 - a_1 = 3^1$

将以上等式两边分别相加, 并整理得 $a_n - a_1 = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^3 + 3^2 + 3^1$

$$\therefore a_n = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1 = \frac{3^n - 1}{2} .$$

4. 形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 的递推数列, 可用求积相消法求 a_n

例 4 . 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2$, $a_n = 3^n a_{n-1}$ ($n \geq 2$) , 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: 由 $a_1 = -2$, $a_n = 3^n a_{n-1}$ 得 $a_{n-1} = 3^{n-1} a_{n-2}$, $a_{n-2} = 3^{n-2} a_{n-3}$, \dots , $a_4 = 3^4 a_3$,
 $a_3 = 3^3 a_2$, $a_2 = 3^2 a_1$

将以上等式两边分别相乘, 并整理得 $a_n = 3^n \cdot 3^{n-1} \cdot 3^{n-2} \cdot \dots \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot a_1 = -2 \cdot 3^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$

5. 形如 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ 的递推数列, 可用两边同除以 p^{n+1} 得 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{g(n)}{p^{n+1}}$, 令

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} , \quad b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{p^{n+1}} , \quad \text{仿照 3 求出 } b_n \text{ 之后, 再求 } a_n .$$

例 5 . 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2^n}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: $\because a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2^n}$, $\therefore 2^{n+1} a_{n+1} = 2^n a_n + 2$, 令 $b_{n+1} = 2^{n+1} a_{n+1}$, 则 $b_{n+1} = b_n + 2$,

即 $\{b_n\}$ 是以 2 为公差, $b_1 = 2a_1 = 2$ 为首项的等差数列, 故有 $b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$, 从

$$\text{而 } a_n = \frac{b_n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

6 . 形如 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 的递推数列, 则其通项 a_n 的求法如下:

(1) 写出递推式所对应的特征方程 $x^2 = px + q$;

(2) 解特征方程得到两个根 x_1, x_2 ;

(3) 如果 $x_1 \neq x_2$, 则可设 $a_n = a \cdot x_1^n + b \cdot x_2^n$; 如果 $x_1 = x_2$, 则可设 $a_n = (c + dn) \cdot x_1^n$;

(4) 由初始值 a_1, a_2 , 求出 a, b 或 c, d 。

例 6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, (n \in N^*)$,

(I) 求证数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: (I) 由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ 得所对应的特征方程是 $x^2 = 3x - 2$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 。

设 $a_n = a + b \cdot 2^n (a, b \in R)$, 由 $a_1 = 1, a_2 = 3$ 得 $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}, \therefore a_n = 2^n - 1$,

从而 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = 2, \therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列。

(II) 由 (I) 得 $a_n = 2^n - 1$ 。

7. 形如 $a_{n+1} = p \cdot a_n^q (p > 0, a_n > 0)$ 的递推数列, 可用对数代换法求 a_n

例 7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4, a_{n+1} = 5a_n^2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: 由 $a_{n+1} = 5a_n^2$, 可知 $a_n > 0$, 故两边取对数得 $\lg a_{n+1} = 2 \lg a_n + \lg 5$

令 $b_n = \lg a_n$, 则 $b_{n+1} = 2b_n + \lg 5$, 化为 $b_{n+1} + \lg 5 = 2(b_n + \lg 5)$, 即 $\{b_n + \lg 5\}$ 是以 2 为

公比, $b_1 + \lg 5 = \lg a_1 + \lg 5 = \lg 20$ 为首项的等比数列, 从而有 $b_n + \lg 5 = (\lg 20) \cdot 2^{n-1}$,

即 $b_n = (\lg 20) \cdot 2^{n-1} - \lg 5, \therefore \lg a_n = \lg \frac{20^{2^{n-1}}}{5}$, 即 $a_n = \frac{20^{2^{n-1}}}{5}$ 。

8. 形如 $a_{n+1} = \frac{a \cdot a_n + b}{c \cdot a_n + d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ 的递推数列, 则其通项 a_n 的求法如下:

(1) 写出递推式所对应的特征方程 $x = \frac{ax + b}{cx + d}$;

(2) 解特征方程得到两个根 x_1, x_2 ;

(3) 如果 $x_1 \neq x_2$, 则数列 $\left\{ \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} \right\}$ 是等比数列; 如果 $x_1 = x_2$, 则数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - x_1} \right\}$ 是等差数列;

(4) 由等比数列或等差数列的通项公式求 a_n 。

例 8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$,

$n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 求 a_1, a_2 ;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解析: 由方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$, 得 $(S_n - 1)^2 - a_n(S_n - 1) - a_n = 0$,

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 又 } a_n = S_n - S_{n-1}, \therefore (S_n - 1)^2 - (S_n - S_{n-1})(S_n - 1) - (S_n - S_{n-1}) = 0,$$

$$\therefore S_n \cdot S_{n-1} - 2S_n + 1 = 0, \text{ 即 } S_n = -\frac{1}{S_{n-1} - 2}, \text{ 其对应的特征根方程为 } x = -\frac{1}{x-2},$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = 1, \therefore \frac{1}{S_n - 1} - \frac{1}{S_{n-1} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{S_{n-1} - 2} - 1} - \frac{1}{S_{n-1} - 1} = -1,$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{S_n - 1} \right\} \text{ 是以 } \frac{1}{S_1 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \text{ 为首项, } -1 \text{ 为公比的等差数列,}$$

$$\therefore \text{ 故 } \frac{1}{S_n - 1} = -2 + (n-1)(-1) = -n-1, \text{ 从而 } S_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$(I) \therefore a_1 = \frac{1}{2}, \therefore a_2 = \frac{1}{6};$$

$$(II) \text{ 由 } S_n = \frac{n}{n+1} \text{ 得 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$