阿波罗尼斯圆

刘俊华

阿氏圆的定义：已知平面上两个定点 A、B，当动点 P 符合到两定点的距离比值为不等于 1 的定值时，点 P 的轨迹是个圆。

常规阿氏圆的求解方法：

例：已知$\mathbf{A(-2,0),B(1,0)}$，动点 P 符合到 A 点的距离与 P 到 B 点的距离之比为 2，求 P 的轨迹方程。

解法一：设点 P（x,y），由题可知$\frac{|PA|}{|PB|}=2$，

即$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=2$，平方移项可得 $(x+2)^2+y^2=4[(x-1)^2+y^2]$，

展开得 $x^2+4x+4+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$，

化简得 $x^2+y^2-4x=0$

也可写成$(x-2)^2+y^2$ =4，圆心 O（2,0），半径是 2。

思路和方法虽然简单，但是运算量有点多，如果题中的定点或比值未知时，这个计算就更复杂了，如果我们对这个圆的性质了解更多一些，就可以列其它方程来求解啦。

定义：反演点、反演(inverse points;inverse)定义：是在圆或球直径上的一对点 P 与 P′，如果它们到中心 O 之距离的乘积，等于半径 r 的平方，则称它们互为反演点，O 称为反演中心，r 称为反演半径。（**即圆心和反演点符合：$\underline{\mathbf{|OP||OP'|=r^2}}$**）从 P 变到 P′或从 P′变到 P 的变换，称为反演变换，或反演映射，简称反演。

可以借助**反演点**的性质应用来找圆心和半径。

我们继续上面的例题，由已求出的圆心坐标 O（2,0），半径为 2，两定点 $A(-2,0),B(1,0)$可知|OA|=4，|OB|=1，r=2，符合$|OA||OB|=r^2$，即**阿氏圆中的两定点 A、B 符合反演的规律**。（完整证明过程先略，感兴趣可以课后联系）

<u>阿氏圆的两个性质：</u>

<u>性质 1.圆心 O 在定点 A、B 的延长线上 k 靠近 P 距离定点较近的那一边；eg.|PA|=2|PB|，圆心在 AB 延长线靠近 B 点的那一端；</u>

性质 2.$|OA||OB| = r^2$

解法二：设圆心为 D（t,0），

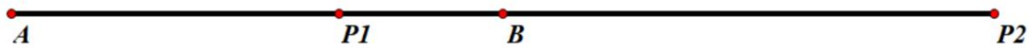
当 P 在 AB 线段上时，根据$|PA| = 2|PB|$可知 P 点坐标为（0,0），所以 r 可表示为|DP|=t，

因为|DA|=t+2，|DB|=t-1，根据|DA||DB|=r^2，得(t+2)(t-1)=t^2，解得 t=2，

所以圆心为（2,0），半径是 2。

定义：调和点列

点P_1在线段AB上且满足$\frac{AP_1}{BP_1} = \lambda(\lambda \neq 0)$



点P_2在线段AB的延长线上且满足$\frac{AP_2}{BP_2} = \lambda(\lambda \neq 0)$

则称A, B两点为基点，点P_1为内分点，点P_2为外分点，A，P_1，B，P_2构成调和点列

性质 3：调和性 $\frac{1}{|AP_1|} + \frac{1}{|AP_2|} = \frac{2}{|AB|}$

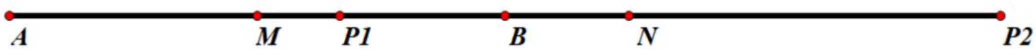
性质 4：共轭性

A，P_1，B，P_2和P_2，B，P_1，A都构成调和点列（从左右两边看都成立）

即$\frac{1}{|P_2A|} + \frac{1}{|P_2B|} = \frac{2}{|P_1P_2|}$也成立

性质 4：等比性

取AB的中点为M，取P_1P_2的中点为N，则有

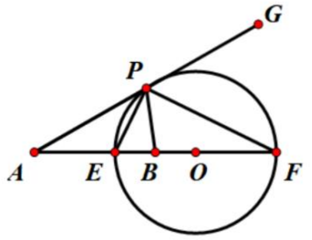


$$|MA|^2 = |MB|^2 = |MP_1| \cdot |MP_2|$$
$$|NP_1|^2 = |NP_2|^2 = |NA| \cdot |NB|$$
$$|AB| \cdot |P_1P_2| = 2|AP_1| \cdot |BP_2| = 2|AP_2| \cdot |BP_1|$$

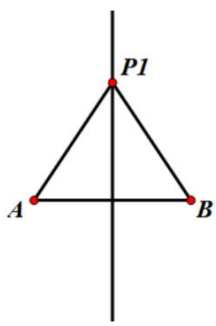
由阿氏圆定义可知这个动点P的轨迹是一个圆。

阿氏圆性质 5.此圆与直线AB交于点E和点F，点E以定比内分线段AB，点F以定比外分线段AB

当$k = 1$，此动点在定线段的垂直平分线上



$\frac{PA}{PB} = k$，且$\frac{FA}{FB} = \frac{EA}{EB} = k$



$\frac{PA}{PB} = 1$

性质 6.证明:取点O满足$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB} = k$，得三角形相似即$\triangle POA \backsim \triangle BOP$

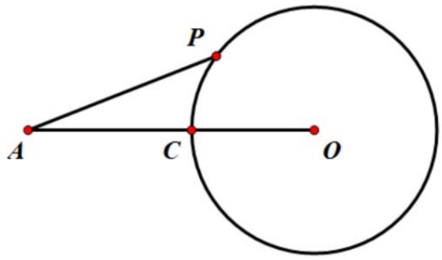
$\because OA$固定，$\therefore OP=\frac{OA}{k}$为定值，则圆以$O$为圆心，$OP$为半径

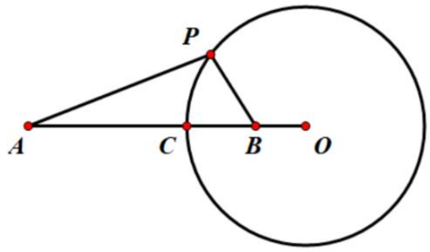
性质 7:在ΔABP中，EP是内角平分线，FP是外角平分线，所以古中国叫它内外圆

题型应用:一个固定圆上动点P和一个圆外定点A，连接圆外定点A和圆心O，与圆交于点C，则在线段OC上内只能找到一个固定点B，使得$PA=kPB$恒成立

根据调和点列或反演点得$OB=\frac{OC^2}{OA}$

切记:一个固定的圆和圆外一个定点，组成的阿氏圆，只能找到一个固定的B点，只能有一个对应的比，且$PA>PB$，$PA=kPB(k>0)$





【例题 1】古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名，他发现；平面内到两个定点 A、B 的距离之比为定值 λ（$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$）的点所形成的图形是圆.后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆.已知在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$.点 P 满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，设点 P 所构成的曲线为 C，下列结论正确的是（　）

A．C 的方程为$(x+4)^2+y^2=16$

B．在 C 上存在点 D，使得 D 到点（1，1）的距离为 10

C．在 C 上存在点 M，使得$|MO|=2|MA|$

D．C 上的点到直线$3x-4y-13=0$的最大距离为 9

【答案】AD

【详解】解：设圆心 C（t，0）（t<-2），当 P 在线段 AB 上时，坐标为（0,0）

所以 $r=-t,|CA|=-2-t,|CB|=4-t$,

由$|CA||CB|=r^2$得$(-2-t)(4-t)=(-t)^2$解得 $t=-4$.r=4，A 正确；

点（1，1）到圆上的点的最大距离$\sqrt{(-4-1)^2+(1-0)^2}+4<10$，故不存在点 D 符合题意，故 B 错误.

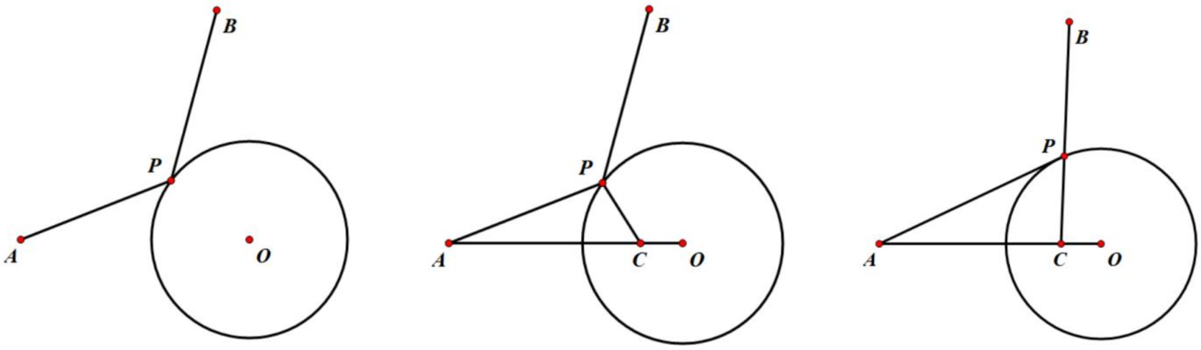
设$M(x_0,y_0)$，由$|MO|=2|MA|$，得$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}$，又$(x_0+4)^2+y_0^2=16$，联立方程消去 y_0 得 $x_0=2$，解得 y_0 无解，故 C 错误；

C 的圆心（-4，0）到直线 $3x-4y-13=0$ 的距离为 $d=\frac{|3\times(-4)-13|}{5}=5$，且曲线 C 的半径为 4，则 C 上的点到直线 $3x-4y-13=0$ 的最大距离 $d+r=5+4=9$，故 D 正确。

【例题 2】已知圆 O：$x^2+y^2=1$ 和点 A（-2,0），若定点 B（b，0）（b≠-2）和常数 k 满足：对圆 O 上任意一点 M，都有|MB|=k|MA|，则 b=________，k=__________。

解:已知 M 在圆 O 上，A、B 应互为反演点，|OA||OB|=r^2，即 2 ×|b|=1，且 b 应在线段 AO 之间，所以 b =$-\frac{1}{2}$，当 M 为（-1,0）时，k=$\frac{1}{2}$。

当遇到 $PA+kPB$ 型的最值问题，要将两线段的系数变成相同的，利用 $kPB=PC$，将 $PA+kPB$ 可转化为 $PA+PC$



当点 APC 三点共线时，$PA+PC$ 最小，即 $PA+kPB$ 值最小。

例 3 在平面直角坐标系中，已知点 $B(4,0)$，$D(1,4)$，C 为圆 $M:(x+4)^2+y^2=16$ 上的动点，则 $|CB|+2|CD|$ 的最小值为______.

【解析】先根据阿氏圆性质，找到与点 $B(4,0)$ 对应的圆 M 内的定点 A，

由 $|MA|\cdot|MB|=r^2$ 可得 $|MA|=2$

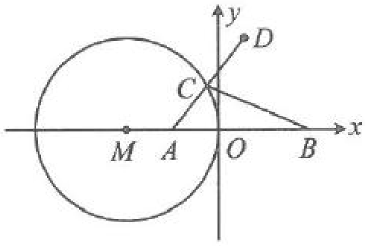
所以 $A(-2,0)$，且对于圆 M 上的任意一点 C，

都有 $\frac{|CB|}{|CA|}=\sqrt{\frac{|MB|}{|MA|}}=2$，从而 $|CB|=2|CA|$

所以 $|CB|+2|CD|=2|CA|+2|CD|=2(|CA|+|CD|)$，如图，

由图可知当点 C 在圆 M 上运动到如图所示位置时，$|CA|+|CD|$ 取得最小值，

且最小值为 $|AD|=\sqrt{(-2-1)^2+(0-4)^2}=5$，所以 $|CB|+2|CD|$ 的最小值为 10.



【答案】10

练习

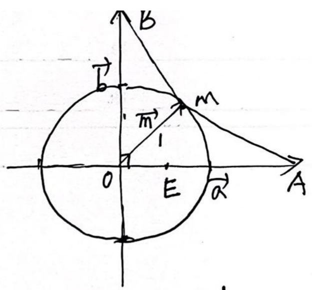
知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且|

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=1$，则 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|+2|$

值为

A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$　　　　B. $\sqrt{15}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　　　D. $\sqrt{17}$



设 $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，则 $|\vec{m}|=1$

$\vec{b}+\vec{c}=\vec{m}-\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{c}=\vec{m}-\vec{b}$

$\therefore |\vec{b}+\vec{c}|+2|\vec{a}+\vec{c}|$

$=|\vec{m}-\vec{a}|+2|\vec{m}-\vec{b}|$

$=MA+2MB$

由 $OZ\cdot OA=1^2$　$\therefore OZ=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{MA}{MZ}=2$

$\therefore MA+2MB=2MZ+2MB$

$\geq\sqrt{17}$

例 4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$BC=2AC$，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为______.

【解析】解法 1：设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，则 $c=6$，$a=2b$，

由余弦定理，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5b^2-36}{4b^2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=b^2\sin C=b^2\sqrt{1-\cos^2 C}=b^2\sqrt{1-\left(\frac{5b^2-36}{4b^2}\right)^2}$

$$=\sqrt{b^2-\frac{25b^4-360b^2+36^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{-9\left(b^4-40b^2+144\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{-9\left(b^2-20\right)^2+9\times 256},$$

所以当 $b=2\sqrt{5}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值 12.

解法 2：以 AB 中点 O 为原点建立如图 1 所示的平面直角坐标系，

则 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $C(x,y)$，

因为 $BC=2AC$，所以 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$，化简得：$(x+5)^2+y^2=16\ (y\neq 0)$

所以点 C 的轨迹是以 $M(-5,0)$ 为圆心，4 为半径的圆（不含与 x 轴的交点)，如图 1，

由图可知，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

解法 3：由 $BC=2AC$ 可知点 C 的轨迹是阿氏圆，设圆心为 M，半径为 r，如图 2，

由阿氏圆性质，$r=\frac{\lambda d}{|\lambda^2-1|}=\frac{2\times 6}{|2^2-1|}=4$，结合图形可得 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

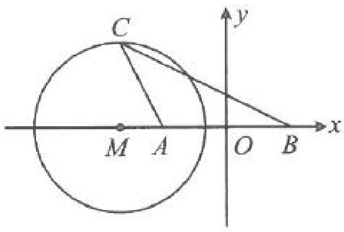


图1

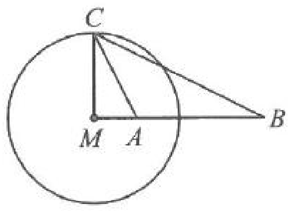


图2

【答案】12

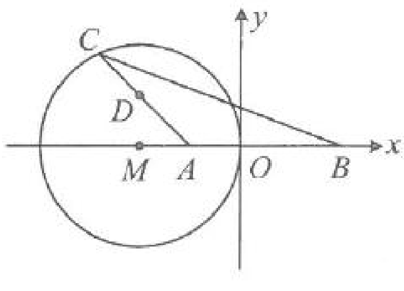
例 5. 在平面直角坐标系中，已知点 $B(4,0)$，$D(-4,2)$，C 为圆 $M:(x+4)^2+y^2=16$ 上的动点，则 $|CB|-2|CD|$ 的最大值为______.

【解析】先根据阿氏圆性质，找到与点 $B(4,0)$ 对应的圆 M 内的定点 A，

由 $|MA|\cdot|MB|=r^2$ 可得 $|MA|=2$，

所以 $A(-2,0)$，且对于圆 M 上的任意一点 C，

都有 $\frac{|CB|}{|CA|}=\sqrt{\frac{|MB|}{|MA|}}=2$，从而 $|CB|=2|CA|$



由图可知当点 C 在圆 M 上运动到如图所示位置时，$|CA|-|CD|$ 取得最大值，

且最大值为 $|AD|=2\sqrt{2}$，所以 $|CB|-2|CD|$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

【答案】$4\sqrt{2}$