



椭圆的标准方程（一）

课堂教学

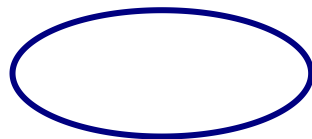
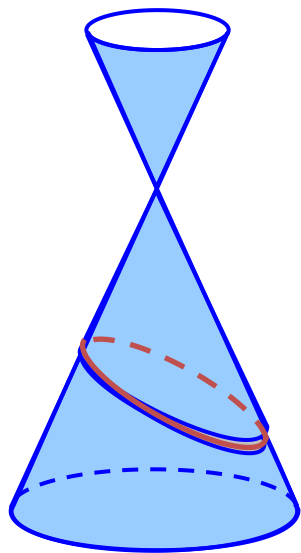


情景引入 认识椭圆

引入1: 1970年4月24日，在酒泉卫星发射中心，随着我国第一枚运载火箭长征一号发出轰鸣，东方红一号卫星飞向广袤无垠的太空。中国从此成为世界上第五个自行研制和发射人造卫星的国家，中国人自此叩开了通往浩瀚宇宙的大门。

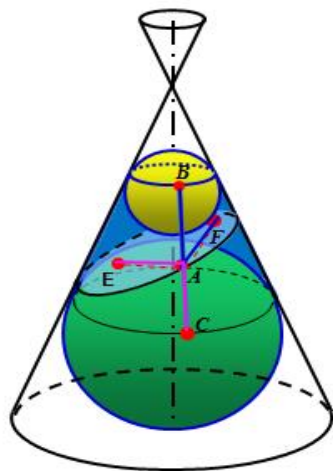
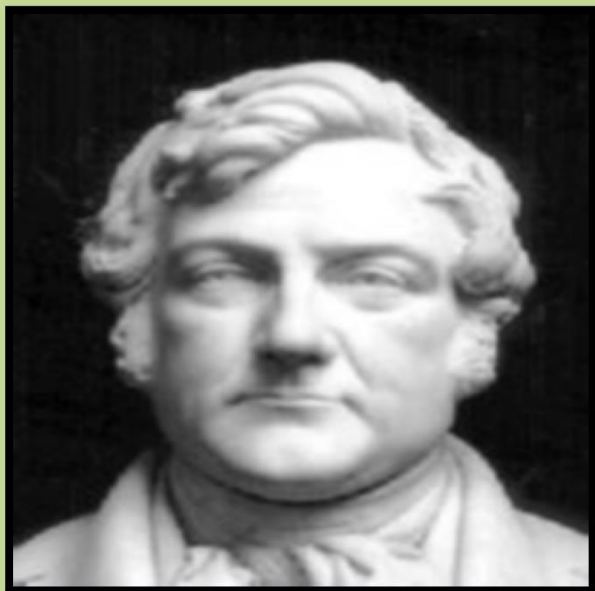
引入2: 古希腊数学家：阿波罗尼奥斯，提出用不同角度的平面截圆锥，可以得到不同的曲线，称之为圆锥曲线。

他在著作《圆锥曲线论》中：**椭圆上的点到两个定点距离之和为常数。**



椭圆


比利时数学家旦德林



实验探究 定义椭圆


实验探究系列：动手实验

探究1：在画板上取两个定点 F_1 、 F_2 ，把一条长度为定值且大于两定点 F_1 、 F_2 的长度细绳的两端固定在 F_1 、 F_2 两点，用笔尖把绳拉紧，移动笔尖看看笔尖画出的轨迹是什么图形？



探究2: 在画板上移动点 F_1 、 F_2 ，使 F_1 、 F_2 距离等于绳长，把绳拉紧，移动笔尖看看笔尖画出的轨迹又是什么图形？

探究3: 若将绳子剪短，小于两定点距离，所画图像会是什么？



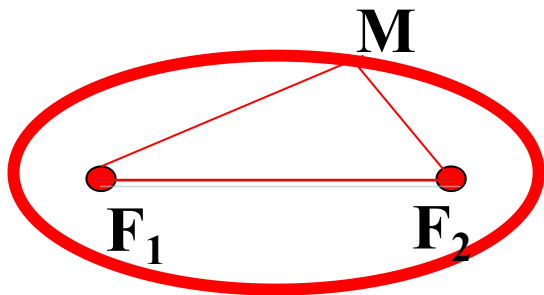
问题1: 应该如何完善刚才对椭圆的定义?

椭圆的定义:

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离的和等于 常数

(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹 (或集合) 叫做**椭圆**.

定点 F_1 、 F_2 叫做椭圆的**焦点**. 两焦点之间的距离叫做**焦距**.



问题2: 前面我们已经学习圆的方程，怎样建立椭圆的方程？

建系、设点、列式、化简.

合理建系 推导方程

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与 F_1 , F_2 的距离的和等于常数 $2a$, 其中 $(a>c>0)$.

数学美

“对称”、“简洁”



问题3: 如何建立平面直角坐标系?

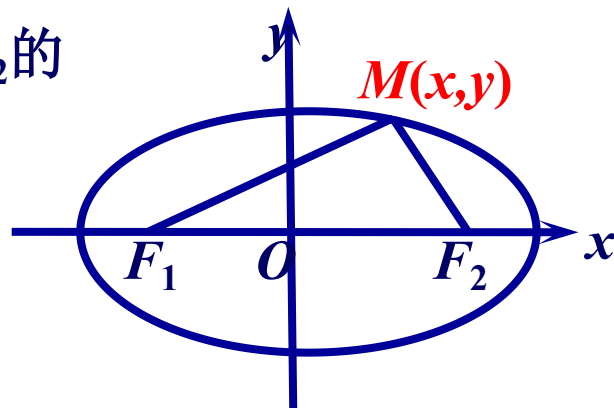
设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与 F_1, F_2 的距离的和等于常数 $2a$, 其中 $(a>c>0)$.

建系: 以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴,
线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴,
建立平面直角坐标系 xOy ,

设点: 则 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$. 设椭圆上任意一点 M
的坐标为 (x, y) ,

列式: 根据椭圆定义知: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

移项得: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

移项平方法

两边平方得: $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

整理得: $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

两边平方得: $a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

整理得: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

因为 $a^2(a^2 - c^2) \neq 0$,

所以两边同除以 $a^2(a^2 - c^2)$ 得: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$\text{由} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{①}$$

分子有理化法

$$\text{(1) 当 } x \neq 0 \text{ 时, } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \neq \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{1} = \frac{[(x+c)^2 + y^2] - [(x-c)^2 - y^2]}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 2a$$

整理得:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{2c}{a}x \quad \text{②}$$

①+②得:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \quad \text{③}$$

③式平方:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

因为 $a^2(a^2 - c^2) \neq 0$, 所以两边同除以 $a^2(a^2 - c^2)$ 得:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\text{(2) 当 } x = 0 \text{ 时, } \sqrt{(0+c)^2 + y^2} + \sqrt{(0-c)^2 + y^2} = 2a$$

得 $y^2 = a^2 - c^2 \therefore M(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2})$ 满足上式.

问题4: 如何使方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ 形式更优美?

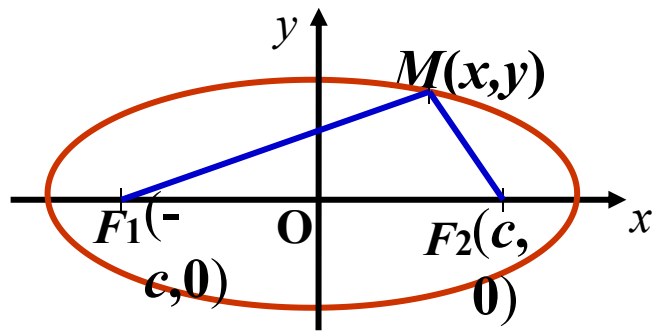
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

由椭圆定义可知 $2a > 2c$, 即 $a > c$, $\therefore a^2 - c^2 > 0$,

$$\text{设 } a^2 - c^2 = b^2 (b > 0),$$

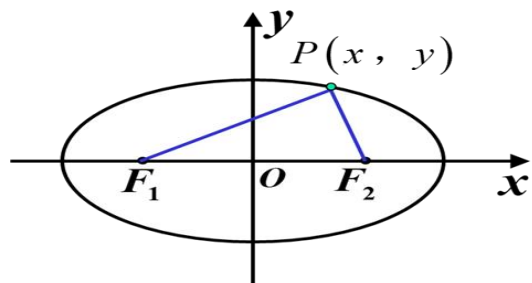
焦点在x轴上椭圆的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

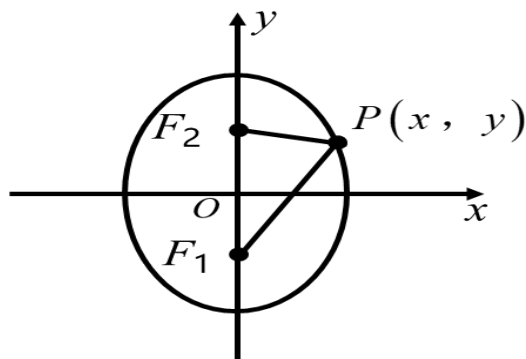


问题5: 当椭圆的焦点在y轴上时,它的标准方程是怎样的呢?

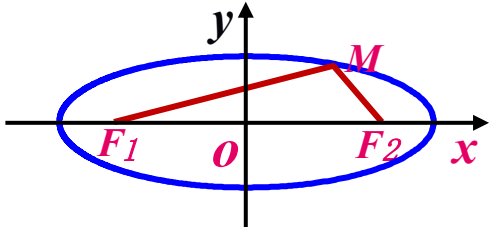
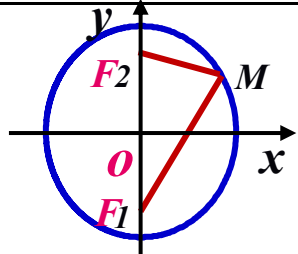
椭圆的标准方程



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} + \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = 2a$$

定义	$ MF_1 + MF_2 =2a$ ($2a>2c>0$)	
图形		
方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)
焦点	$F(\pm c, 0)$	$F(0, \pm c)$
a, b, c 之间的关系	$c^2 = a^2 - b^2$	

焦点位置的判断：焦点在x轴的椭圆 x^2 项分母较大.

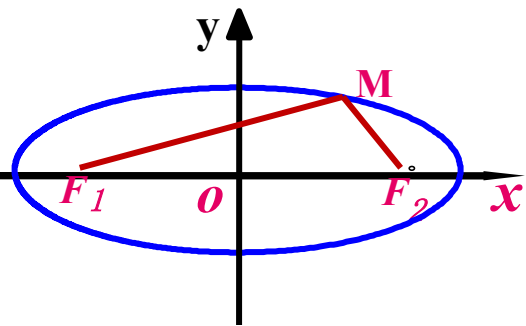
焦点在y轴的椭圆 y^2 项分母较大

学以致用 例题研讨

例1. 求适合下列条件的椭圆标准方程:

(1) 椭圆的两个焦点的坐标分别是 $F_1(-3, 0)$
 $F_2(3, 0)$, 椭圆上一点 M 到两焦点距离之和等于8,
求椭圆的标准方程。

(2) 椭圆的两个焦点的坐标分别是 $F_1(0, -4)$
 $F_2(0, 4)$, 并且椭圆经过点 $P(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$ 。





问题5：通过本节课的学习，你有哪些收获？

知识

椭圆的定义与方程

思想

数形结合, 类比思想

文化

椭圆的研究历史

方法

坐标法

作业布置 课下探究

课后作业：

必做： 课本p128练习A1,3 练习B1,3

选做： 课本p129练习B5

研究性作业： 1方程什么时候表示椭圆？什么时候表示焦点在x轴上的椭圆？什么时候表示焦点在y轴上的椭圆？能表示圆吗？



椭圆的标准方程（一）

教学阐述





C 目录

ontents

01

教学内容解析

02

教学目标设置

03

学生学情分析

04

教学策略分析

05

教学过程设计





1

教学内容解析



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

解三角形

正弦定理与余弦定

正弦定理与余弦定理应用

数学探究活动

正弦定理



余弦定理

三角函数在三角形中的运用

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

承上启
下

完善建
构

拓展提
升



2

教学目标设置



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

构建

1

借助几何直观，
通过实验归纳椭圆
的定义；。

掌握

2

理解并掌握利用
椭圆的定义，掌
握椭圆的标准方
程；

感悟

3

通过推导椭圆
的标准方程，
体会坐标法思
想，感受类比
的魅力。



3

学生学情分析



知识 储备

- 学习了圆的定义及其标准方程；体会了坐标法的思想。

存在 问题

- 缺少化简含两个根式相加式子的活动经验。

解决 方法

- 通过学生动手画椭圆的实验，遵循直观感知、抽象概括的思维方式得出椭圆的定义，类比圆的方程推导椭圆的标准方程。

教学内容解析

怎样将生活中对椭圆的认识与椭圆的定义联系起来，这是本节课的第一个教学问题。这不仅是本节课的重点，也是教学难点。

教学目标设置

学生学情分析

如何建立坐标系并理解椭圆标准方程之“标准”的意义，是第二个教学问题。其实任何一种建系方法都是可以求出对应的椭圆方程，怎么建立坐标系才能使得方程更简洁？

教学策略分析

如何化简方程，是第三个教学问题。学生目前化简方程能力是比较弱的，对于含根号的式子进行化简，常用两边平方法。到底是直接两边平方还是移项后两边平方更简便？

教学过程设计



4

教学策略分析



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

学生活动
自主探究

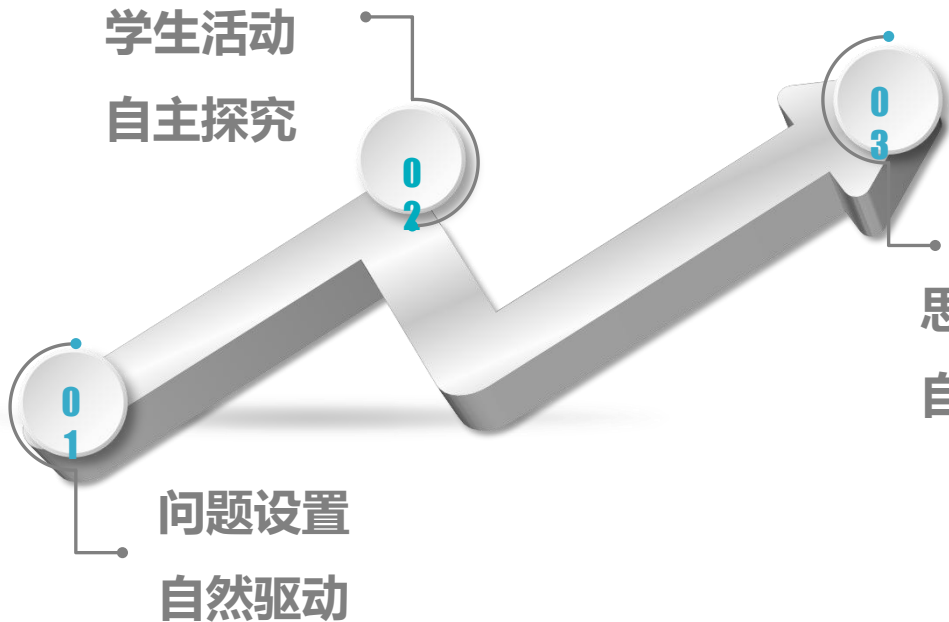
02

03

思想渗透
自觉升华

01

问题设置
自然驱动



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

1

遵循以学生为主体，教师为主导，发展为主旨的现代教育原则

2

采用以问题的提出、问题的解决为主线

3

始终在学生知识的“最近发展区”设置问题

4

以学生主动探索、积极参与、共同交流与协作为主体



5

教学过程设计



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

• 情境引入

• 实验探究

• 合理建系

• 类比推理

• 学以致用

• 总结升华

• 作业布置

• 认识椭圆

• 定义椭圆

• 推导方程

• 分类讨论

• 例题研讨

• 提升素养

• 课下探究



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

情境引入 定义椭圆

情景引入 认识椭圆

引入1: 1970年4月24日，在酒泉卫星发射中心，随着我国第一枚运载火箭长征一号发出轰鸣，东方红一号卫星飞向广袤无垠的太空。中国从此成为世界上第五个自行研制和发射人造卫星的国家，中国人自此叩开了通往浩瀚宇宙的大门。



设计意图

数学来源于生活而又服务于生活，从学生兴趣点入手激发学习兴趣，同时增强学生的爱国主义情怀

教学内容解析

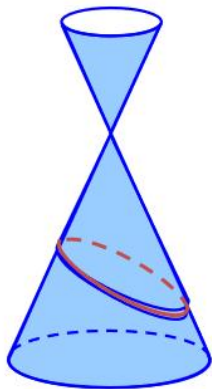
教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

引入2: 古希腊数学家：阿波罗尼奥斯，提出用不同角度的平面截圆锥，可以得到不同的曲线，称之为圆锥曲线。
他在著作《圆锥曲线论》中：**椭圆上的点到两个定点距离之和为常数。**



椭圆

设计意图

了解椭圆的发展史，
加强数学文化教育，
并直观感受椭圆。

教学内容解析

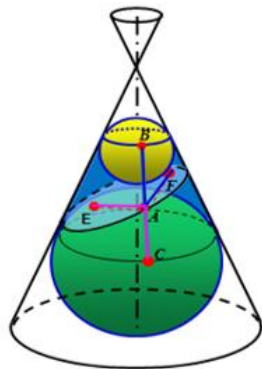
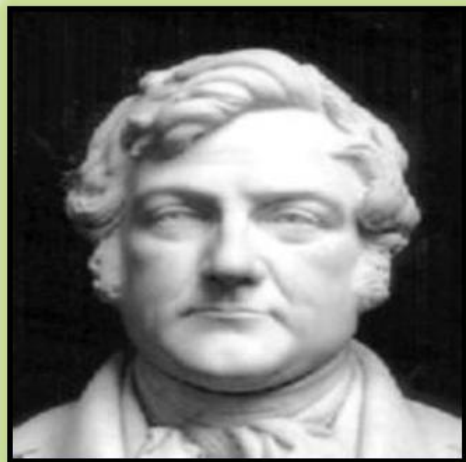
教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

比利时数学家旦德林



设计意图

创设情境将对椭圆的感性认识上升为理性认识，从直观几何转化为解析几何。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

设计意图

实验探究系列：动手实验

探究1：在画板上取两个定点 F_1 、 F_2 ，把一条长度为定值且大于两定点 F_1 、 F_2 的长度细绳的两端固定在 F_1 、 F_2 两点，用笔尖把绳拉紧，移动笔尖看看笔尖画出的轨迹是什么图形？

探究2：在画板上移动点 F_1 、 F_2 ，使 F_1 、 F_2 距离等于绳长，把绳拉紧，移动笔尖看看笔尖画出的轨迹又是什么图形？

探究3：若将绳子剪短，小于两定点距离，所画图像会是什么？

让学生通过探究活动，更好地理解椭圆的定义，体会画椭圆的方法及定义中的关键要素。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

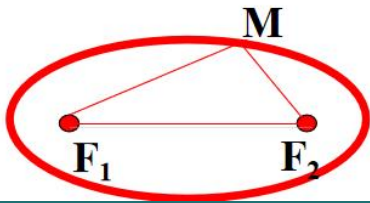
问题1: 应该如何完善刚才对椭圆的定义?

椭圆的定义:

平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离的和等于常数

(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹 (或集合) 叫做**椭圆**。

定点 F_1 、 F_2 叫做椭圆的**焦点**. 两焦点之间的距离叫做**焦距**。



设计意图

加深对椭圆定义中关键要素的理解，为后续方程推导及性质学习做铺垫。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

设计意图

问题2: 前面我们已经学习圆的方程, 怎样建立椭圆的方程?

建系、设点、列式、化简.

激活学生已有的认知结构,用类比思想为研究椭圆找到了方法与策略.

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

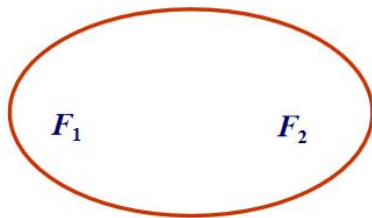
教学策略分析

教学过程设计

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c$ ，椭圆上任意一点与 F_1 ， F_2 的距离的和等于常数 $2a$ ，其中 $(a>c>0)$ 。

数学美

“对称”、“简洁”



问题3：如何建立平面直角坐标系？

设计意图

类比圆方程最简形式与坐标系的关系，根据椭圆的对称性选择最佳建系方法推导椭圆的方程，进而更好地理解标准方程之“标准”所在，并能体会数学之“美”

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

设计意图

在推导方程过程中，利用两种常用的平方法，引导学生在化简时要注意分析式子的结构特征，选择对应的化简方法，另外需引导学生使用分子有理化观点减少平方次数，提高运算能力，增强数学核心素养运算能力。

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \quad \text{移项平方法}$$

$$\text{移项得: } \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\text{两边平方得: } (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\text{整理得: } a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\text{两边平方得: } a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\text{整理得: } (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

因为 $a^2(a^2 - c^2) \neq 0$,

$$\text{所以两边同除以 } a^2(a^2 - c^2) \text{ 得: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

由 $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ ①

分子有理化法

(1) 当 $x \neq 0$ 时, $\sqrt{(x+c)^2+y^2} \neq \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}}{1} = \frac{[(x+c)^2+y^2] - [(x-c)^2-y^2]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}} = 2a$$

整理得:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{2c}{a}x \quad \text{②}$$

①+②得:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x \quad \text{③}$$

③式平方:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

因为 $a^2(a^2 - c^2) \neq 0$, 所以两边同除以 $a^2(a^2 - c^2)$ 得:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

(2) 当 $x = 0$ 时, $\sqrt{(0+c)^2+y^2} + \sqrt{(0-c)^2+y^2} = 2a$

得 $y^2 = a^2 - c^2 \therefore M(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2})$ 满足上式.

设计意图

在推导方程过程中, 利用两种常用的平方法, 引导学生在化简时要注意分析式子的结构特征, 选择对应的化简方法, 另外需引导学生使用分子有理化观点减少平方次数, 提高运算能力, 增强数学核心素养运算能力。

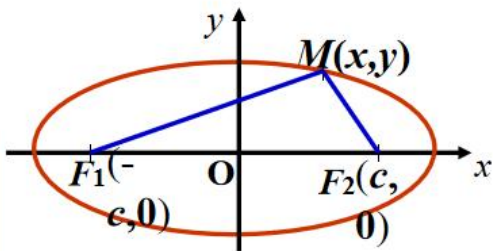
问题4: 如何使方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ 形式更优美?

由椭圆定义可知 $2a > 2c$, 即 $a > c$, $\therefore a^2 - c^2 > 0$,

设 $a^2 - c^2 = b^2 (b > 0)$,

焦点在x轴上椭圆的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

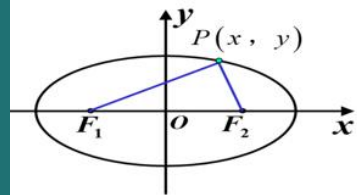


设计意图

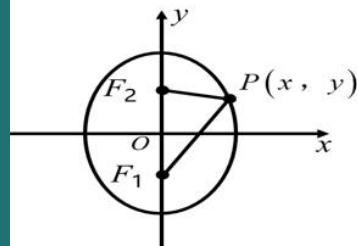
暴露自然思维, 通过比较, 得出最简洁的方案, 而不是被动地接受教材或老师强加给的方法, 使学生完全成了学习的主人, 由被动的接受变成主动的获取。在师生互动的过程中, 让学生体会数学的严谨, 使他们的观察能力、运算能力、推理能力得到训练, 渗透数形结合的数学思想。并感受椭圆方程、图形的对称美, 简洁美

问题5: 当椭圆的焦点在y轴上时,它的标准方程是怎样的呢?

椭圆的标准方程



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} + \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = 2a$$

设计意图

利用类比对称,划归的思想让学生体会问题的本质所在,只是位置不同,图形是一致的,得出焦点在y轴上的椭圆的标准方程,避免繁杂计算.

教学内容解析

教学目标设置

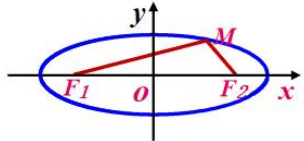
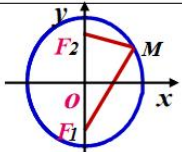
学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

设计意图

通过归纳总结让学生对两种方程进行对比分析，强化对椭圆方程的理解.有助于教学目标的实现，培养学生的总结归纳能力，而且使学生体会和学习类比的思想方法，为后边双曲线、抛物线及其它知识的学习打下基础.

定义	$ MF_1 + MF_2 =2a \ (2a>2c>0)$	
图形		
方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$
焦点	$F(\pm c, 0)$	$F(0, \pm c)$
a, b, c 之间的关系	$c^2 = a^2 - b^2$	

焦点位置的判断：焦点在x轴的椭圆 x^2 项分母较大。
 焦点在y轴的椭圆 y^2 项分母较大

学以致用 例题研讨

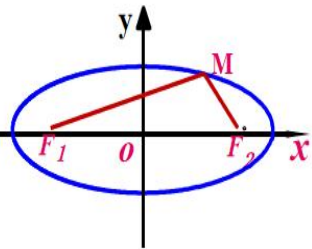
例1. 求适合下列条件的椭圆标准方程:

(1) 椭圆的两个焦点的坐标分别是 $F_1(-3, 0)$

$F_2(3, 0)$, 椭圆上一点 M 到两焦点距离之和等于8,
求椭圆的标准方程。

(2) 椭圆的两个焦点的坐标分别是 $F_1(0, -4)$

$F_2(0, 4)$, 并且椭圆经过点 $P(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$ 。



设计意图

第一个练习是前面的例题, 判断出轨迹是椭圆后, 继续拿来求其标准方程; 第二个练习让学生熟悉焦点在轴上的标准方程; 同时检验学生对椭圆标准方程的理解与应用

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

归纳总结 提升素养

问题6: 通过本节课的学习, 你有哪些收获?

知识

椭圆的定义与方程

思想

数形结合, 类比思想

文化

椭圆研究历史

方法

坐标法

设计意图

回顾和总结本节课的主要内容, 优化重组认识结构, 并鼓励学生养成多总结, 多反思的好习惯。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

作业布置 课下探究

课后作业：

必做：课本p128练习A1,3 练习B1,3

选做：课本p129练习B5

研究性作业：1方程什么时候表示椭圆？什么时候表示焦点在x轴上的椭圆？什么时候表示焦点在y轴上的椭圆？能表示圆吗？

设计意图

进一步巩固新知，加强解决问题的能力；研究性作业的设计可以提高学生独立思考、自主探究的能力，满足学有余力的同学需要，同时为后续学习做铺垫，为学有余力的学生留有进一步探索、发展的空间。



敬请指导!