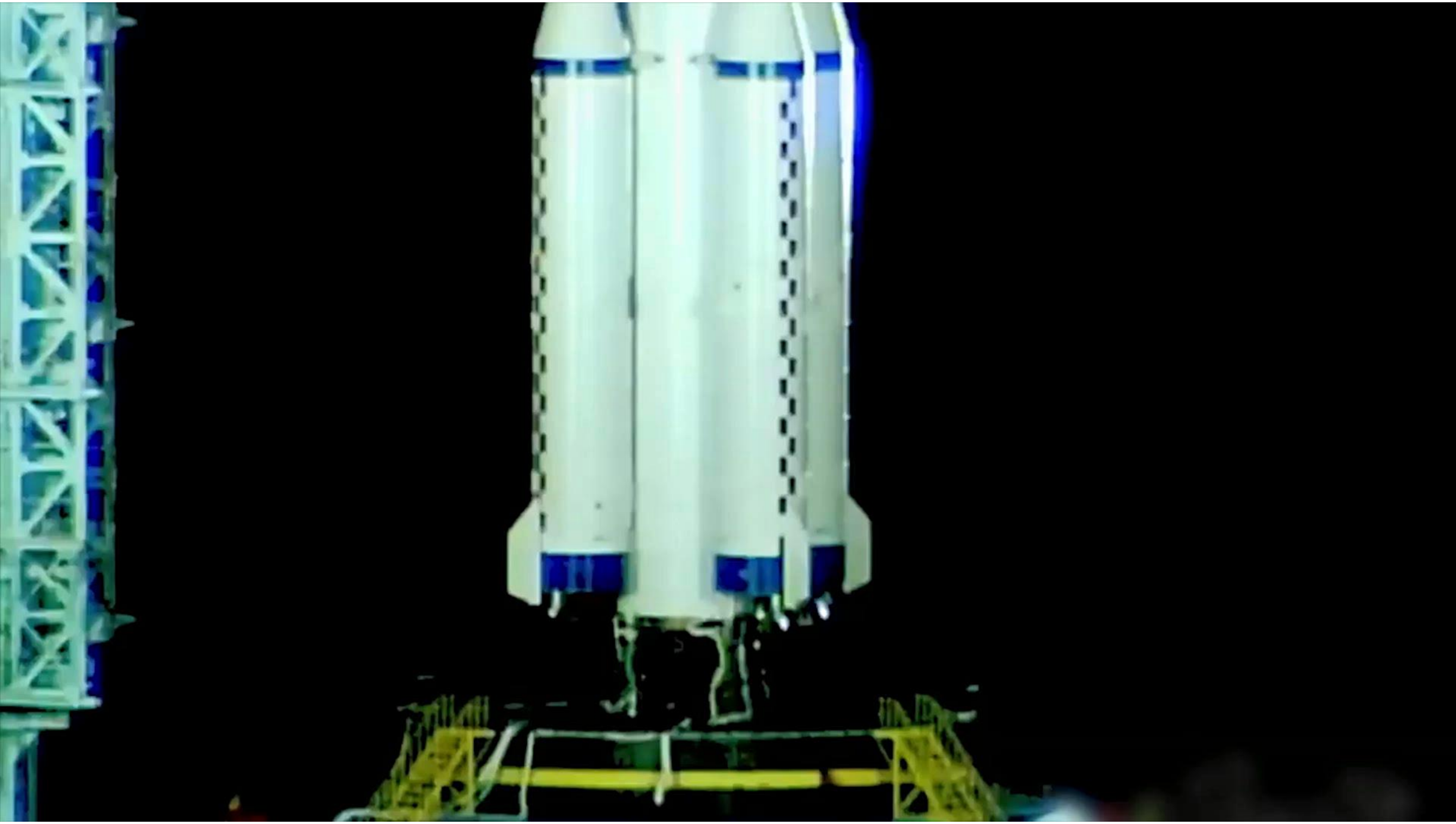
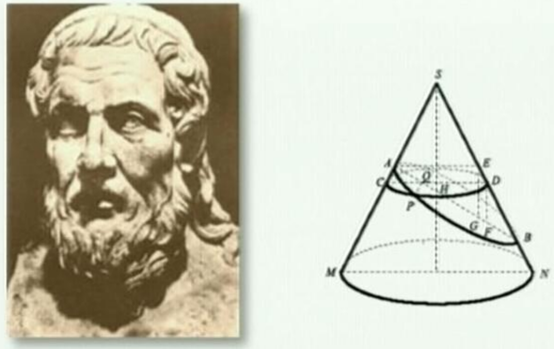


椭圆的标准方程（第一课时）

人教B版　选择性必修一　第二章　2.5.1

- # 椭圆的起源与发展

——聆听椭圆历史，感受数学文化



阿波罗尼奥斯《圆锥曲线》

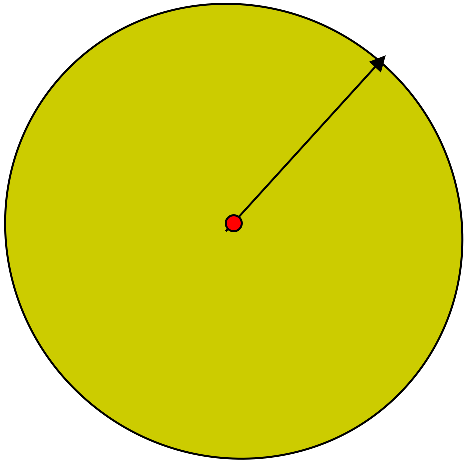

欧几里得《原本》

通常认为，最早是古希腊人通过削尖的圆木桩（平面斜截圆柱所得交线）发现了椭圆

生活中的椭圆

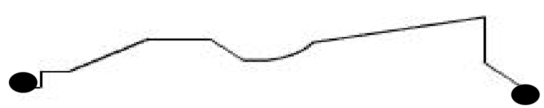
复习回顾

问题： 圆是怎么定义的？



设计实验

动手试验：在画板上取两个定点F_1、F_2, 把一条长度为定值细绳的两端固定在F_1、F_2 两点，用笔尖把绳拉紧，移动笔尖看看笔尖画出的轨迹是什么图形?



通过实验，大家能总结出**椭圆的定义**吗?

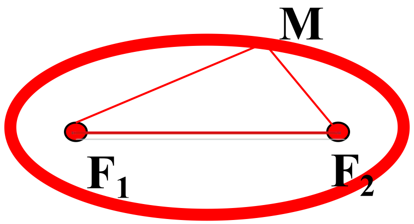
概念形成

椭圆的定义：

平面内与两个定点F_1、F_2的距离的和等于 常数 $2a$

的点的轨迹（或集合）叫做椭圆.

定点F_1、F_2叫做椭圆的焦点. 两焦点之间的距离叫做焦距. $2c$



问题1:若绳子长度等于两定点距离，则所画图像会是什么？

问题2:若将绳子长度小于两定点距离，则所画图像会是什么？

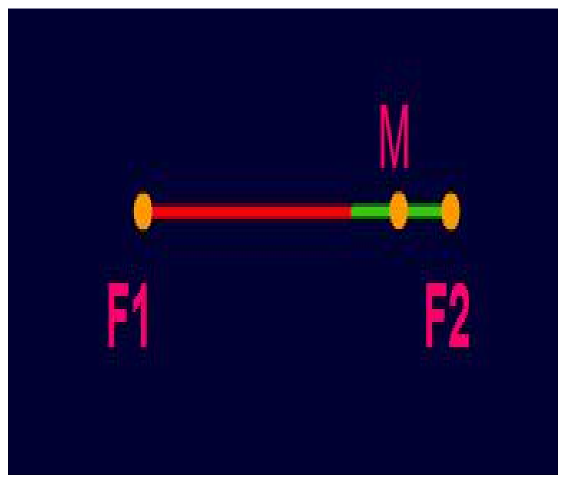
概念形成

动手试验：画出到两个定点距离之和等于常数的点的轨迹.

两定点之间的距离与小于绳长：

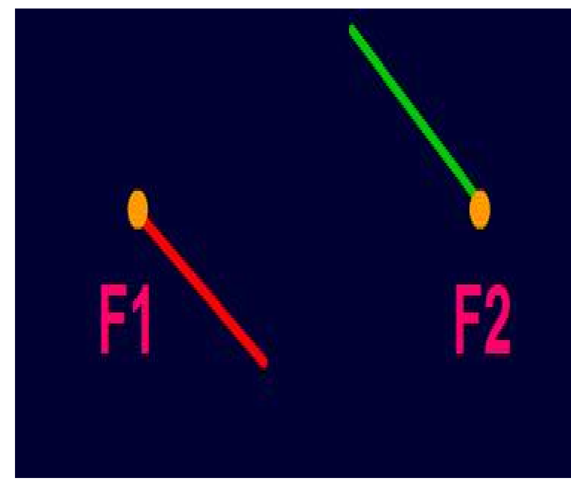
动点轨迹：**椭圆！**

两定点之间的距离与绳长相等：



动点轨迹：**线段！**

两定点之间的距离大于绳长：



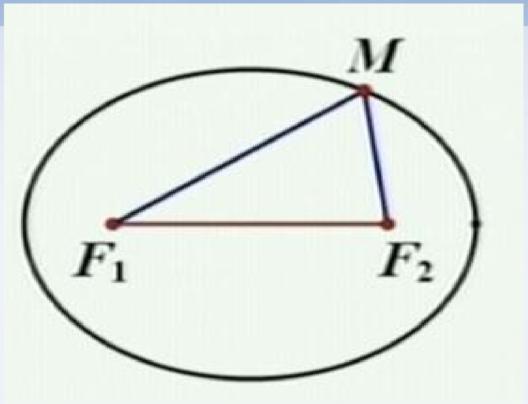
动点轨迹:**不存在！**

概念形成

数缺形时少直观，形少数时难入微------华罗庚

设椭圆的焦距$|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与F_1，F_2的距离的和等于常数$2a$,其中$(a>c>0)$.

1661-1704 洛必达



数量关系，设$|F_1F_2|=2c$　$a>c$

$|MF_1|+|MF_2|=2a$

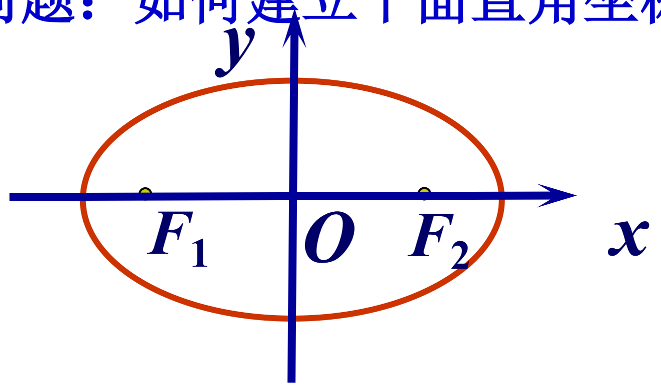
洛必达在《圆锥曲线分析》中抛弃了古希腊人对于椭圆的图形定义，改用椭圆的数量关系定义，并以此推导了椭圆方程。

新知探究

设椭圆的焦距$|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与F_1, F_2的距离的和等于常数$2a$,其中$(a>c>0)$.

“对称”、“简洁”

问题：如何建立平面直角坐标系？

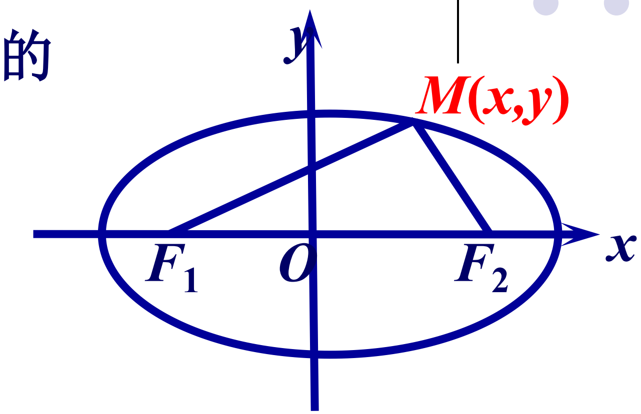


问题：利用坐标法求曲线方程的一般方法与步骤是什么？

建系　设点　列式　化简　证明

新知探究

设椭圆的焦距$|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与F_1, F_2的距离的和等于常数$2a$,其中$(a>c>0)$.



建系: 以F_1,F_2所在直线为x轴，
线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，
建立平面直角坐标系xOy，

设点: 则F_1, F_2的坐标分别为$(-c,0),(c,0)$. 设椭圆上任意一点 M 的坐标为$(x，y)$，

列式: 根据椭圆定义知:$|MF_1|+|MF_2|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

新知探究

$\because \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ 直接平方

$\therefore (x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2$

$\therefore 2x^2+2y^2+2c^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2$

整理可得$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2)$

$\therefore \sqrt{(x^2+y^2+c^2)+2cx}\bullet\sqrt{(x^2+y^2+c^2)-2cx}=2a^2-(x^2+y^2+c^2)$

整理得$\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2)$

$\therefore (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=(2a^2-(x^2+y^2+c^2))^2$

$\therefore (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2$

即$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$ 整理得$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1.$

新知探究

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

移项平方法

移项得： $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

两边平方得： $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

整理得： $\boxed{a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$

两边平方得： $a^4\underline{-2a^2cx}+c^2x^2=a^2x^2\underline{-2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2$

整理得：$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

因为$a^2(a^2-c^2)\neq 0$，

所以两边同除以$a^2(a^2-c^2)$得： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

新知探究

分子有理化法

由 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ ①

(1)当 $x\neq 0$ 时, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{1}=\frac{\left[(x+c)^2+y^2\right]-\left[(x-c)^2-y^2\right]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=2a$$

整理得: $\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2c}{a}x \text{ ②}}$

①+②得: $\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x \text{ ③}}$

③式平方: $(a^2-c^2)\ x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

因为 $a^2(a^2-c^2)\neq 0$，所以两边同除以 $a^2(a^2-c^2)$ 得: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$

(2) 当 $x=0$ 时, $\sqrt{(0+c)^2+y^2}+\sqrt{(0-c)^2+y^2}=2a$

得 $y^2=a^2-c^2$ $\therefore M(0,\pm\sqrt{a^2-c^2})$ 满足上式.

新知探究

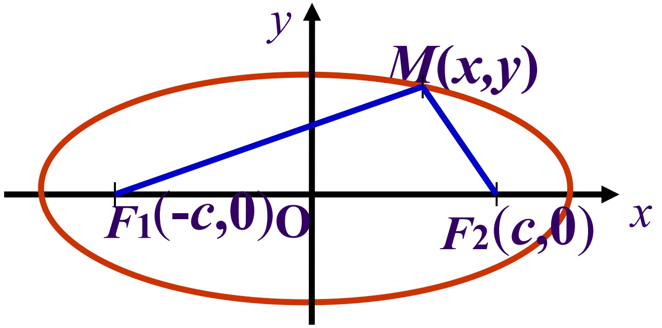
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

由椭圆定义可知 $2a>2c$,即 $a>c$,$\therefore a^2-c^2>0$,

设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$,

焦点在x轴上椭圆的标准方程:

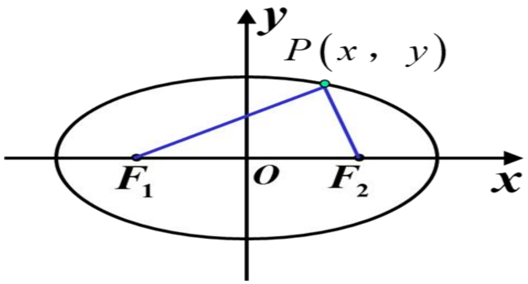
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)}$$

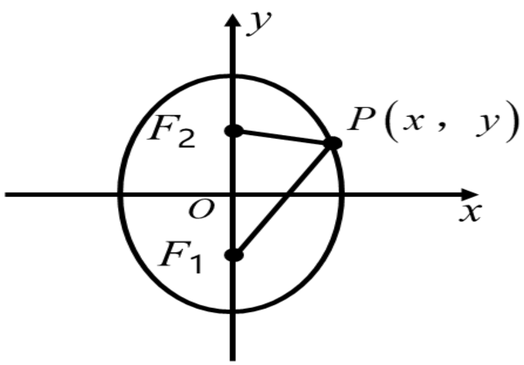


思考:当椭圆的焦点在y轴上时,它的标准方程是怎样的呢?

新知探究

椭圆的标准方程



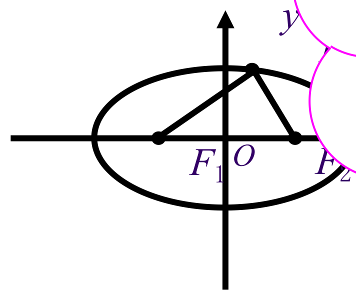


$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}+\sqrt{(y-c)^2+x^2}=2a$$

新知探究

成功在于积累。——爱默生

	定　义	平面内到两 于常数	
不同点	图　形		x
	标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\left(a>b>0\right)$
	焦点坐标	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
相同点	a、b、c 的关系	$a^2-c^2=b^2$	
	焦点位置的判断	分母哪个大，焦点就在哪个轴上	

椭圆方程有特点

系数为正加相连

分母较大焦点定

右边数“1”记心间

学以致用

例题1：求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，椭圆上一点P与两焦点的距离的和等于8；

（2）两个焦点坐标分别是$(0,-4)$，$(0,4)$，并且椭圆经过点$(\sqrt{3},-\sqrt{5})$

规律方法

1.求椭圆的标准方程时，先确定焦点位置，再求a, b, c

即要"先定型，再定量".

2.定　义　法：求出a和c，进一步求出b.

待定系数法：先设出标准方程，根据两个条件联立方程组，

直接求出a,b.

小结

一个概念： $|MF_1|+|MF_2|=2a\ (2a>|F_1F_2|)$

二种方程： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ $\quad \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>b>0)$

三类方法： 数形结合　化归　方程的思想

总结升华

生活情境
历史情境 → 定义归纳 → 方程推导 → 知识应用

生活情境、历史情境 ↓ 直观想象、数学抽象、数学建模

定义归纳 ↓ 数据分析、归纳概括

方程推导 ↓ 数学运算、逻辑推理

知识应用 ↓ 数据分析、数学运算

布置作业

1.课本P49习题2.2 A组1，2，3

2.课本P50习题2.2 B组1，2

3.思考：椭圆标准方程还有其他推导方法吗？

说课内容

- 一、教材分析
- 二、教法设计
- 三、学法设计
- 四、学情分析
- 五、教学程序
- 六、板书设计
- 七、评价设计

一、教材分析

1、新课标要求

“经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，掌握椭圆的定义及标准方程”

一、教材分析

1、教材的地位和作用

本节课是对前面所学的运用坐标法研究曲线的几何性质的又一实际演练，同时也是进一步研究椭圆几何性质的基础，为我们研究双曲线、抛物线提供了基本模式和理论基础。因此本节课具有承前启后的作用，是本章的重点，也是高考的热点。

2、教学内容与教材处理

椭圆及其标准方程共两课时，第一课时所研究的是椭圆标准方程的建立及其简单运用．教师将以课堂教学的组织者、引导者、合作者的身份，组织学生动手实验、归纳猜想、推理验证，掌握各种数学基本技能，培养学生学习的兴趣．

3、教学目标

学 习 目 标	核 心 素 养
1．掌握椭圆的定义，会用椭圆的定义解决实际问题．(重点) 2．掌握用定义法和待定系数法求椭圆的标准方程．(重点) 3．理解椭圆标准方程的推导过程，并能运用标准方程解决相关问题．(难点)	1．通过椭圆的定义、标准方程的学习，培养数学抽象素养． 2．借助于标准方程的推导过程，提升逻辑推理、数学运算素养．

4、重点与难点

- 重点：掌握椭圆的定义及标准方程，理解坐标法的基本思想.

- 难点：椭圆标准方程的推导与化简.

二、教法设计

本节课主要采用问题探究式和启发式教学法。突出体现以学生为主体的探究性学习和因材施教的原则。同时使用多媒体辅助教学，增强动感和直观性，加大课堂信息量，提高学生的学习效率。

三、学法设计

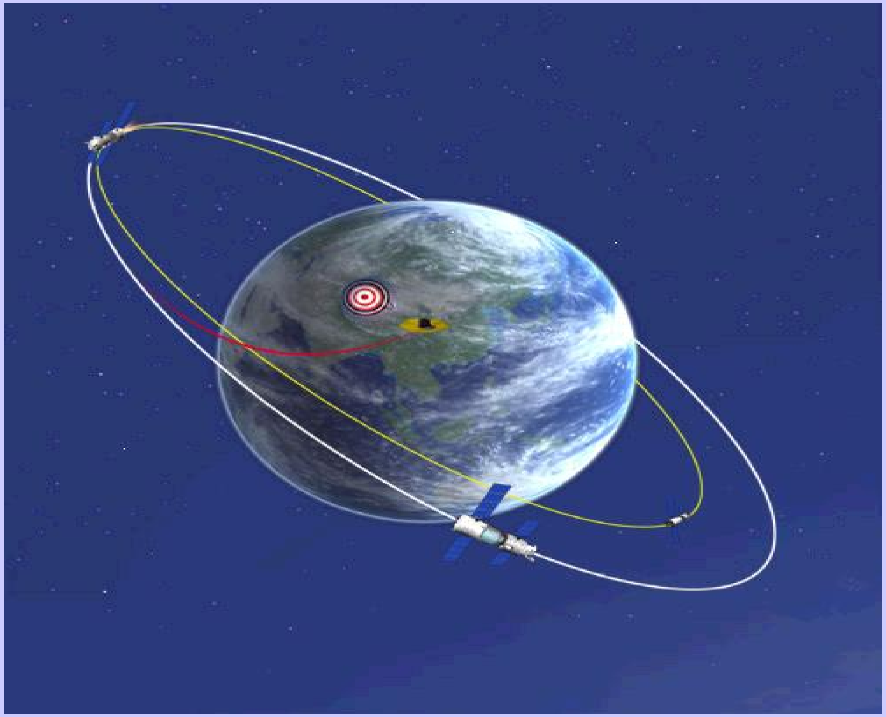
通过创设情境，充分调动学生已有的学习经验，让学生动手实践、主动探究、合作交流，于问题的分析和解决中实现知识的建构和发展。

四、学情分析

学生已初步掌握用坐标法研究直线与圆的方程，已基本熟悉求曲线方程的步骤及方法，并且学生有积极的学习态度和强烈的求知欲。

五、教学程序

情境引入

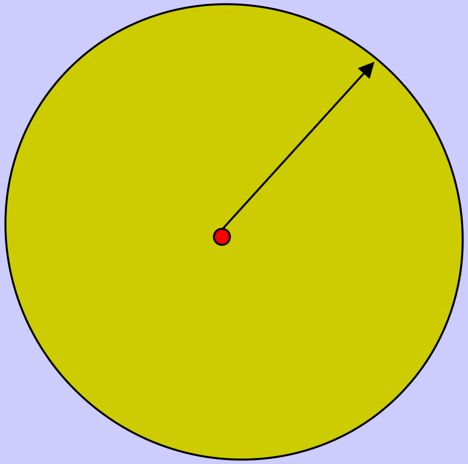


设计意图

从现实问题引入，使学生了解数学源于实际，让学生感受现实，激发求知欲，快速溶入知识的探究中.

复习回顾

问题： 圆是怎么定义的？



设计意图

复习前面已经学过的知识唤起学生的记忆，为本节课学习作下铺垫

设计实验

[1]取一条细绳

[2]把它的两端固定在板上的两点F_1、F_2

[3]用铅笔尖（M）把细绳拉紧，在板上慢慢移动看看画出的图形

设计意图

通过画图给学生提供一个动手操作、合作学习的机会，调动学生学习的积极性。

概念形成

1. 椭圆的定义：平面内与两个定点 F_1 , F_2 的距离的和等于常数的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

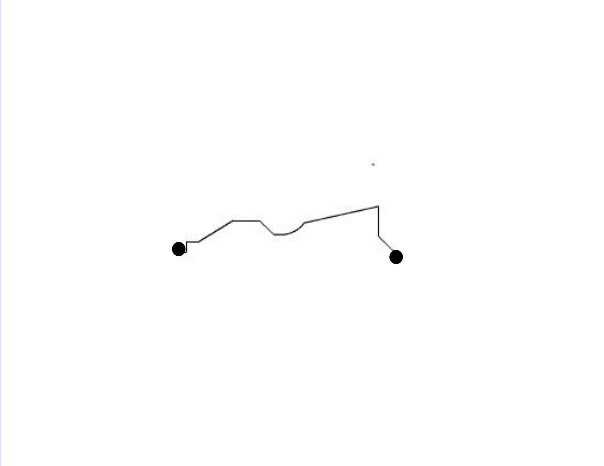
问题1:若绳子长度等于两定点距离，则所画图形会是什么？

问题2:若将绳子长度小于两定点距离，则所画图形会是什么？

概念形成

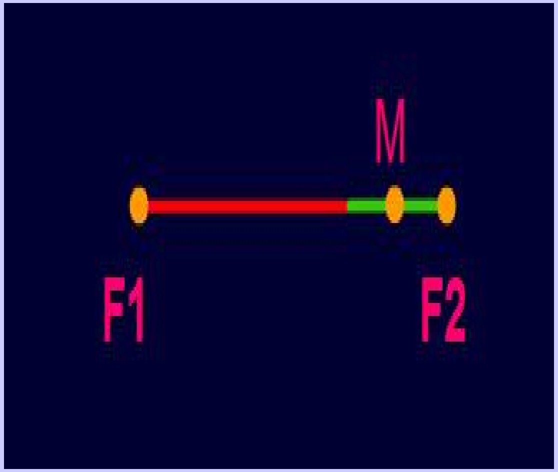
动手试验： 画出到两个定点距离之和等于常数的点的轨迹.

两定点之间的距离与小于绳长：



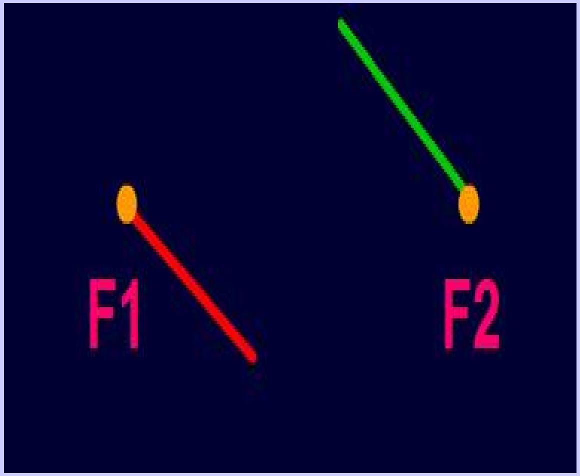
动点轨迹：椭圆！

两定点之间的距离与绳长相等：



动点轨迹：线段！

两定点之间的距离大于绳长：



动点轨迹:不存在！

概念形成

1. 椭圆的定义：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

(常数大于 $|F_1F_2|$)

问题1:若绳子长度等于两定点距离，则所画图形会是什么？

问题2:若将绳子长度小于两定点距离，则所画图形会是什么？

设计意图

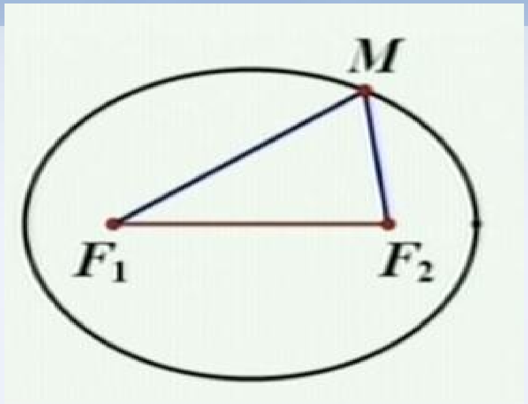
通过动手实验，让每一位学生亲身经历知识的形成过程，培养学生动手、动脑的能力;通过学生讨论，发表自己的观点，增强合作意识，提高学生概括能力和语言表达能力，加深对知识的理解和掌握.

概念形成

数缺形时少直观，形少数时难入微------华罗庚

设椭圆的焦距$|F_1F_2|=2c$，椭圆上任意一点与F_1，F_2的距离的和等于常数$2a$，其中$(a>c>0)$.

1661-1704 洛必达



数量关系，设$|F_1F_2|=2c$　$a>c$

$$|MF_1|+|MF_2|=2a$$

洛必达在《圆锥曲线分析》中抛弃了古希腊人对于椭圆的图形定义，改用椭圆的数量关系定义，并以此推导了椭圆方程。

学习探究

用坐标法求曲线方程的步骤是什么？

一般步骤:

(1) 建系设点

(2) 写出点的集合

(3) 列出方程

(4) 化简方程

点拨:怎样建系可以使方程尽可能简单?

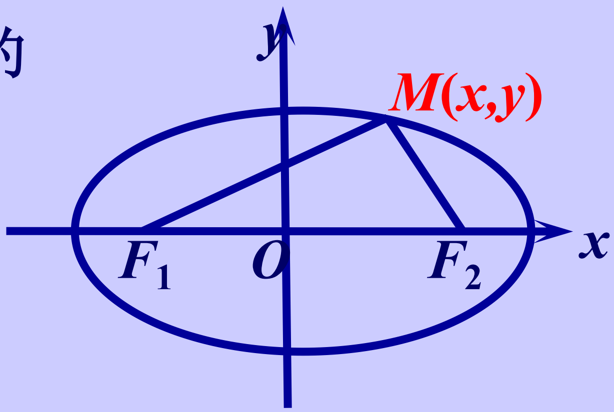
点拨:化简的目的是什么?有怎样的方法?

设计意图

复习已有知识，为探究椭圆的标准方程作准备.

新知探究

设椭圆的焦距$|F_1F_2|=2c$, 椭圆上任意一点与F_1，F_2的距离的和等于常数$2a$,其中$(a>c>0)$.



建系： 以F_1,F_2所在直线为x轴，
线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，
建立平面直角坐标系xOy，

设点： 则F_1，F_2的坐标分别为$(-c,0)$,$(c,0)$. 设椭圆上任意一点 M 的坐标为$(x，y)$，

列式： 根据椭圆定义知:$|MF_1|+|MF_2|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

直接平方

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

移项平方

分子有理化

$$\Downarrow$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\Downarrow$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Downarrow$$

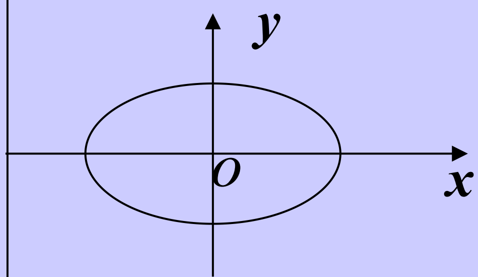
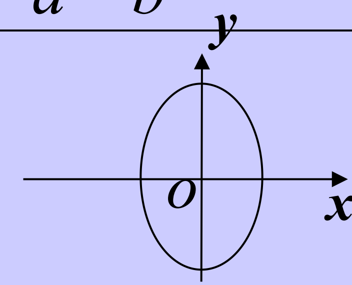
$b^2=a^2-c^2$
$(a>b>0)$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

设计意图

数学运算是解决数学问题的基本手段，通过运算促进数学思维的发展，形成规范化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学精神。

归纳深化

<table>
<tr><td rowspan="3">不同点</td><td>标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>焦点坐标</td><td>$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">共同点</td><td>定义</td><td colspan="2">平面内与两定点F_1、F_2的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做椭圆.</td></tr>
<tr><td>a、b、c的关系</td><td colspan="2">$b^2=a^2-c^2$</td></tr>
<tr><td>焦点位置的判定</td><td colspan="2">椭圆的两种标准方程中，总是 $a>b>0$. 所以哪个项的分母大，焦点就在那个轴上.</td></tr>
</table>

学以致用

例题1：求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是$F_1(-3, 0)$，$F_2(3, 0)$，椭圆上一点P与两焦点的距离的和等于8；

（2）两个焦点坐标分别是$(0, -4)$，$(0, 4)$，并且椭圆经过点$(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$

活动方式：

思考——分析——解答（板演）——点评

设计意图

通过本题，加深学生对椭圆定义的理解，提高对知识的应用能力，掌握求椭圆方程的两种方法：定义法和待定系数法.

小结

一个概念： $|MF_1|+|MF_2|=2a$

二种方程： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

三类方法： 数形结合　化归　方程的思想

设计意图

加深学生对本节知识的整体认识，提高学生概括能力.

六、板书设计

2.5.1 椭圆的标准方程

一、椭圆的定义

$|MF_1|+|MF_2|=$常数(大于$|F_1F_2|$)

二、椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

方程的推导

学生板演区域

七、评价设计

- 1、本节课主要通过学生动手实验，主动探究，让学生成为课堂的真正主人，加深了学生对知识的理解与掌握，提高了解决问题的能力.

- 2、通过学法指导，引导学生思维向更深更广发展，以培养学生良好的思维品质，并为以后进一步学习双曲线和抛物线作好铺垫。


谢谢