A photograph of a modern university campus. In the foreground, there is a large, grey, textured rock sculpture. Behind it, several multi-story buildings are visible. One building has a prominent yellow entrance. The sky is clear and blue. A semi-transparent white box with red text is overlaid on the left side of the image.

团结、勤奋、求实、创新

数列的应用 (1)

——分期付款与数列

一、新课标要求（学习目标）



(1) 能够将实际问题转化为数列模型，提高分析问题和解决问题的能力；（数学建模）

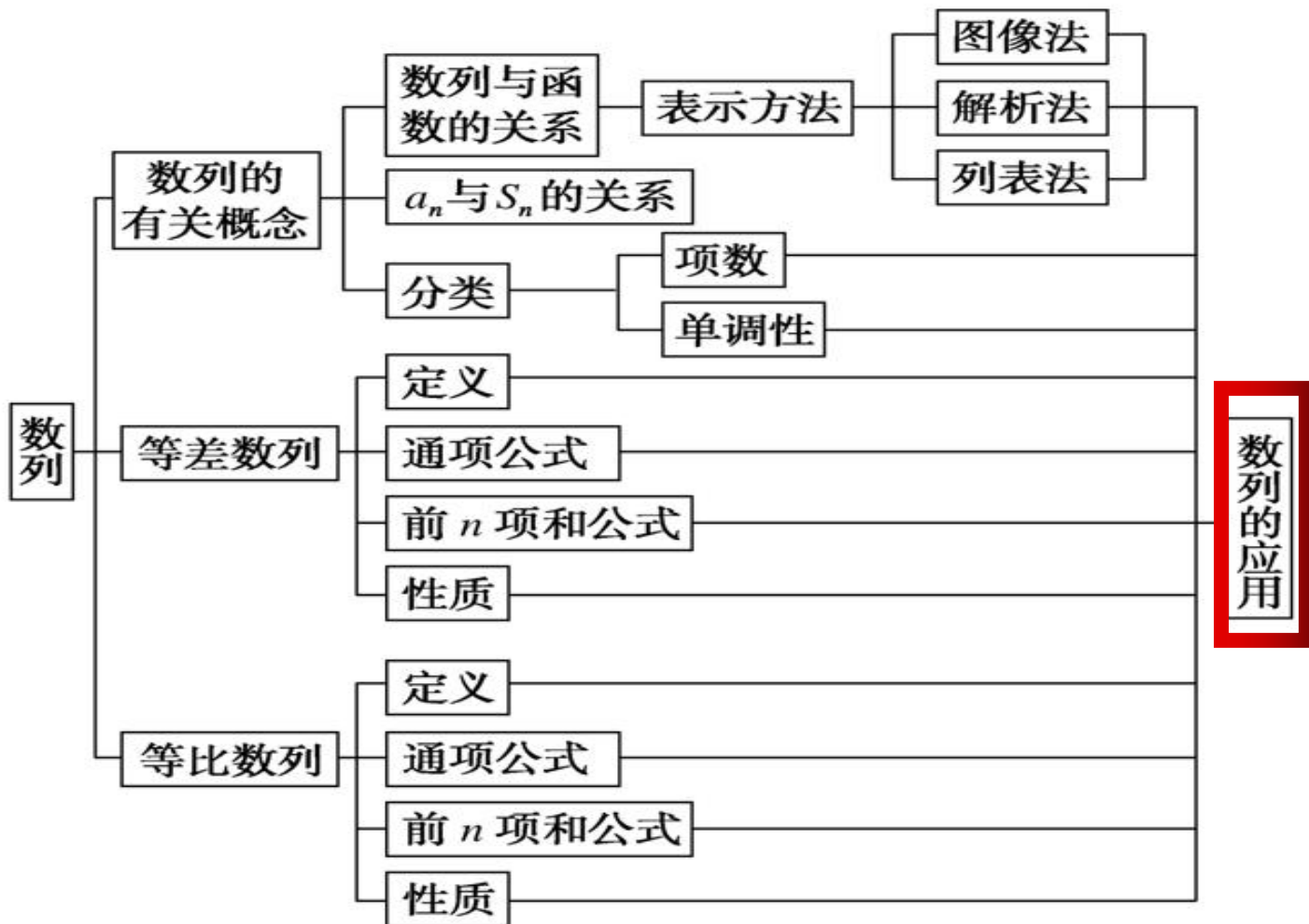
(2) 能够利用等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式解决分期付款问题。（数学运算）

二、重点、难点

重点：将实际问题转化成数学问题.

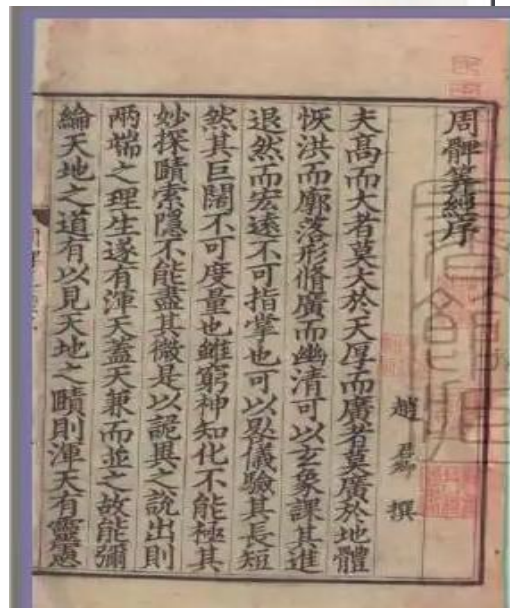
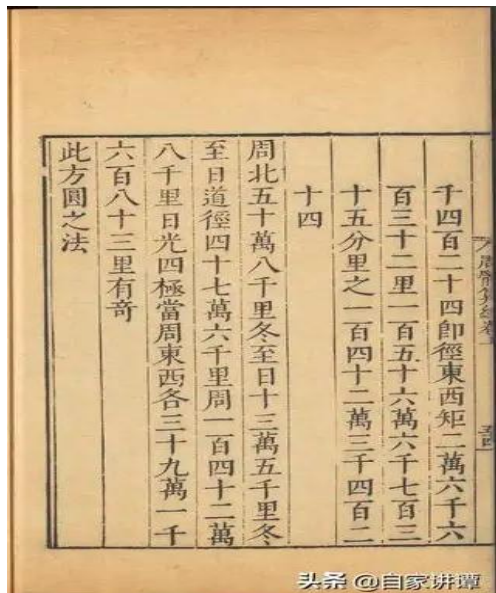
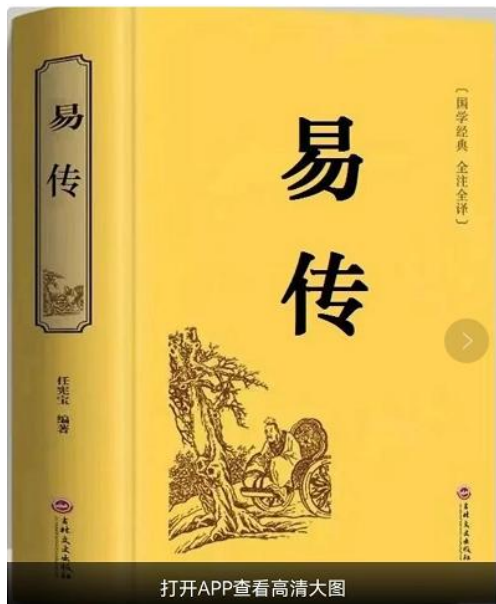
难点：等额本息还款法公式推导.

三、数列单元思维导图





四、传统文化中的数列



引入：



自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，因为无法预计前期经营状况，张华跟银行约定按照“**等额本息还款法**”分10年进行还款，**由于国家对大学生创业的优惠政策**，贷款的年利率由**5%降为3%**，试求张华还款总额优惠了多少？



五、概念形成

1. 等额本金还款法:

每期还款分为两部分，即本金和利息，**每期还款的本金都相等**，利息随所还本金的增加而逐次递减，因此，**每期还款金额=本金+利息。**

×

2. 等额本息还款法: **每期还款金额相同。**

六、新知探究 (一)



例1.自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，**因为预计前期经营状况会比较好**，张华跟银行的约定按照“**等额本金还款法**”分10年进行还款，贷款的年利率为5%，设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元，求出 a_n 的表达式，并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征。（**国家规定：第一次还款时间为贷款后的一年**）

思考：

问题1.每期的还款金额由哪几部分构成？

问题2.每期还款利息怎么计算？

问题3.每期还款金额怎么计算？

六、新知探究 (一)



解：因为每期所还本金为 $\frac{200000}{10} = 20000$ (元)

第1年还款金额： $a_1 = 20000 + 200000 \times 5\% = 30000$ (元)

第2年还款金额： $a_2 = 20000 + (200000 - 20000) \times 5\% = 29000$ (元)

第3年还款金额： $a_3 = 20000 + (200000 - 20000 \times 2) \times 5\% = 28000$ (元)

• • • • •

第n年还款金额：

$$a_n = 20000 + [200000 - 20000(n - 1)] \times 5\% = -1000n + 31000$$

• • • • •

第10年还款金额： $a_{10} = 20000 + (200000 - 20000 \times 9) \times 5\% = 21000$ (元)

可以看出, $\{a_n\}$ 是一个递减的等差数列.



六、新知探究 (一)

如果向银行贷款本金 A_0 元, 打算利用等额本金还款方式, 分成 m 期偿还, 并且每一期的利率为 r ($r > 0$), 记每期还款的钱数构成的数列为: a_1, a_2, \dots, a_m , 请写出第 n 期还款的钱数 a_n 的表达式.

等额本金还款公式:

$$a_n = \frac{A_0}{m} + \left[A_0 - \frac{A_0}{m}(n-1) \right] \times r$$

六、新知探究 (一)



例1.自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，**因为预计前期经营状况会比较好**，张华跟银行的约定按照“等额本金还款法”分10年进行还款，贷款的年利率为5%，设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元，求出 a_n 的表达式，并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征。（国家规定：第一次还款时间为贷款后的一年）

思考：

问题1.每期的还款金额有哪几部分构成？

问题2.每期还款利息怎么计算？

问题3.每期还款金额怎么计算？

问题4.还款全部完成，求张华的还款总额.

六、新知探究 (一)



解：因为每期所还本金为 $\frac{200000}{10} = 20000$ (元)

第1年还款金额： $a_1 = 20000 + 200000 \times 5\% = 30000$ (元)

第2年还款金额： $a_2 = 20000 + (200000 - 20000) \times 5\% = 29000$ (元)

第3年还款金额： $a_3 = 20000 + (200000 - 20000 \times 2) \times 5\% = 28000$ (元)

• • • • •

第n年还款金额：

$a_n = 20000 + [200000 - 20000(n - 1)] \times 5\%$

• • • • •

第10年还款金额： $a_{10} = 20000 + (200000 - 20000 \times 9) \times 5\%$

可以看出, $\{a_n\}$ 是一个递减的等差数列.

张华还款总额为： $\frac{10(30000 + 21000)}{2} = 255000$

数学核心素养：
数学抽象
数学建模
逻辑推理
数学运算
数据分析

六、新知探究 (二)



例1变式:

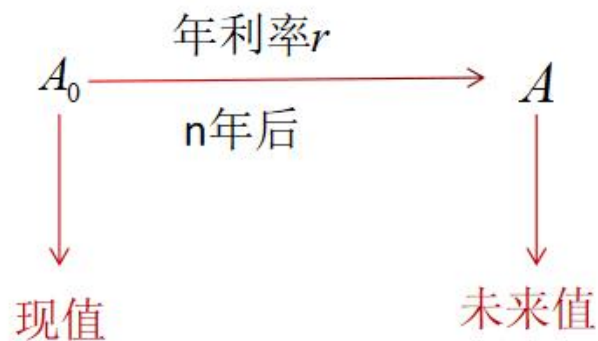
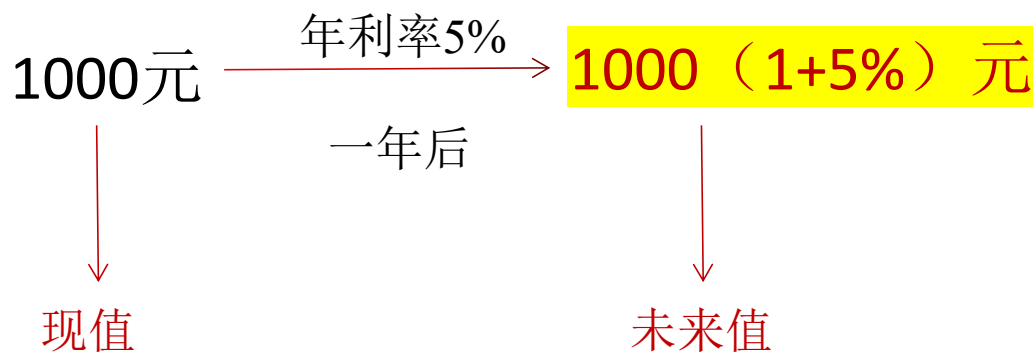
自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，因为**无法预料前期经营状况**，张华跟银行的约定按照“**等额本息还款法**”分10年进行还款，贷款的年利率为5%，设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元，求出 a_n 的表达式，并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征。**(国家规定：第一次还款时间为贷款后的一年)**

六、新知探究 (二)



什么是资金的现值和未来值

假设你现在手中有1000元钱，而且你打算一年以后再使用这笔钱，那么一年以后这笔钱所能买到的东西价值最多只能是1000元吗？为什么？



$$A = A_0(1+r)^n, \text{ 即 } A_0 = \frac{A}{(1+r)^n}$$

六、新知探究 (二)



例1变式:

自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所,因为**无法预料前期经营状况**,张华跟银行的约定按照**“等额本息还款法”**分10年进行还款,贷款的年利率为5%,设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元,求出 a_n 的表达式,并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征。参考值: $1.05^{10} = 1.63$ (国家规定: 第一次还款时间为贷款后的一年)

思考:

问题1: 20万元10年后的未来值是多少?

问题2: 设每期的还款金额为 x ,那么 x 的现值和未来值怎样计算?

问题3: 从现值相等的角度思考,你能得到什么等式?

从未来值相等的角度思考,你又能得到怎样的等式? 两个等式有什么关系?

六、新知探究 (二)



问题1: 20万元10年后的未来值是多少? $200000 \times (1+5\%)^{10}$

问题2: 每期的还款金额的现值和未来值怎样计算? 设每年还款金额为 x 元.

问题3: 从现值相等的角度思考, 你能得到什么等式?

从未来值相等的角度思考, 你又能得到怎样的等式? 两个等式有什么关系?

第1年所还钱的现值是 $\frac{x}{1+5\%}$

第2年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^2}$

• • • • •

第9年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^9}$

第10年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^{10}}$

第1年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)^9$

第2年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)^8$

• • • • •

第9年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)$

第10年所还钱为 x

现值相等:

$$\frac{x}{1+5\%} + \frac{x}{(1+5\%)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+5\%)^{10}} = 200000$$

未来值相等:

$$x(1+5\%)^9 + x(1+5\%)^8 + \cdots + x(1+5\%) + x = 20(1+5\%)^{10}$$

解得: $x = 25873$



六、新知探究 (二)

如果向银行贷款本金 A_0 元, 打算利用等额本息还款方式, 分成 m 期偿还, 并且每一期的利率为 $r (r > 0)$, 记每期还款的钱数构成的数列为: a_1, a_2, \dots, a_m , 请写出第 n 期还款的钱数 a_n 的表达式.

解: 每一期所还钱数为 x 元, 则

第1期所还钱的现值为 $\frac{x}{1+r}$ 元,

第2期所还钱的现值为 $\frac{x}{(1+r)^2}$ 元

• • • • •

第 m 期所还钱的现值为 $\frac{x}{(1+r)^m}$ 元

现值相等:

$$\frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x}{(1+r)^m} = A_0$$

第1期所还钱的未来值是 $x \cdot (1+r)^{m-1}$

第2期所还钱的未来值是 $x \cdot (1+r)^{m-2}$

• • • • •

第 m 期所还钱

未来值相

$$x(1+r)^{m-1}$$

$$= A_0(1+r)^m$$

思路3:
逐期计算欠款来获得,
第 m 期还款后的欠款为 0

等额本息每期还款数额: $x = \frac{A_0 r (1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$

六、新知探求 (二)



例1变式:

自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所,因为**无法预料前期经营状况**,张华跟银行的约定按照**“等额本息还款法”**分10年进行还款,贷款的年利率为5%,设第 n 年张华的还款金额为 a_n 元,求出 a_n 的表达式,并说出数列 $\{a_n\}$ 的特征。参考值: $1.05^{10} = 1.63$ (国家规定: 第一次还款时间为贷款后的一年)

思考:

问题1: 20万元10年后的未来值是多少?

问题2: 每期的还款金额的现值和未来值怎样计算?

问题3: 从现值相等的角度思考,你能得到什么等式?

从未来值相等的角度思考,你又能得到怎样的等式? 两个等式有什么关系?

问题4: 还款全部完成,求张华还款总额.

六、新知探究 (二)



问题1: 20万元10年后的未来值是多少? $200000 \times (1+5\%)^{10}$

问题2: 每期的还款金额的现值和未来值怎样计算? 设每年还款金额为 x 元.

第1年所还钱的现值是 $\frac{x}{1+5\%}$

第2年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^2}$

• • • • •

第9年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^9}$

第10年所还钱的现值是 $\frac{x}{(1+5\%)^{10}}$

第1年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)^9$

第2年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)^8$

• • • • •

第9年所还钱的未来值是 $x \cdot (1+5\%)$

第10年所还钱为 x

现值相等:

$$\frac{x}{1+5\%} + \frac{x}{(1+5\%)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+5\%)^{10}} = 200000$$

未来值相等:

$$x(1+5\%)^9 + x(1+5\%)^8 + \cdots + x(1+5\%) + x = 20(1+5\%)^{10}$$

解得: $x = 25873$ 总额为 $25873 \times 10 = 258730$ 元

六、新知探究 (二)



等额本金还款法

$$a_1 = 20000 + 200000 \times 5\% = 30000(\text{元})$$

$$a_2 = 20000 + (200000 - 20000) \times 5\% = 29000(\text{元})$$

$$a_3 = 20000 + (200000 - 20000 \times 2) \times 5\% = 28000(\text{元})$$

•••••

$$a_{10} = 20000 + (200000 - 20000 \times 9) \times 5\% = 21000(\text{元})$$

公式: $a_n = -1000n + 31000$

总额: $\frac{10(30000 + 21000)}{2} = 255000$

等额本息还款法

$$a_n = 25873$$

$$a_n = 25873$$

$$25873 \times 10 = 258730 \text{元}$$

“等额本金还款法”PK“等额本息还款法”

七、效果检测



刚考入大学的小明准备向银行贷款5000元购买一台笔记本电脑，然后上学的时候通过勤工俭学来分期还款，小明与银行约定：每个月还一次款，在12个月内还清所有的欠款，贷款的月利率为0.5%，试**分别用两种还款方式**求出小明所要还款的钱数总额。（精确到0.01元）

七、效果检测



解：（1）当小明选择的还款方式为“等额本金还款法”时，

$$\text{第}n\text{个月的还款钱数为：}\frac{5000}{12} + [5000 - \frac{5000}{12} \times (n-1)] \times 5\%$$

所以小明要还款总额约5162.52元.

（2）当小明选择的还款方式为“等额本息还款法”时，

$$x = \frac{5000 \times 0.5\% \times (1 + 0.5\%)^{12}}{(1 + 0.5\%)^{12} - 1} \approx 430.33 \text{ (元)}$$

所以小明要还款总额约5163.96元.

八、学以致用



自主创业的大学生张华向银行贷款200000元租赁了一处经营场所，因为无法预计前期经营状况，张华跟银行约定按照“**等额本息还款法**”分10年进行还款，**由于国家对大学生创业的优惠政策**，贷款的年利率降为3%，试求张华还款总额优惠了多少？



$$\text{解： } x = \frac{200000 \times 3\% \times (1 + 3\%)^{10}}{(1 + 3\%)^{10} - 1} = 23446.9$$

$$\text{总额为 } 23446.9 \times 10 = 234469$$

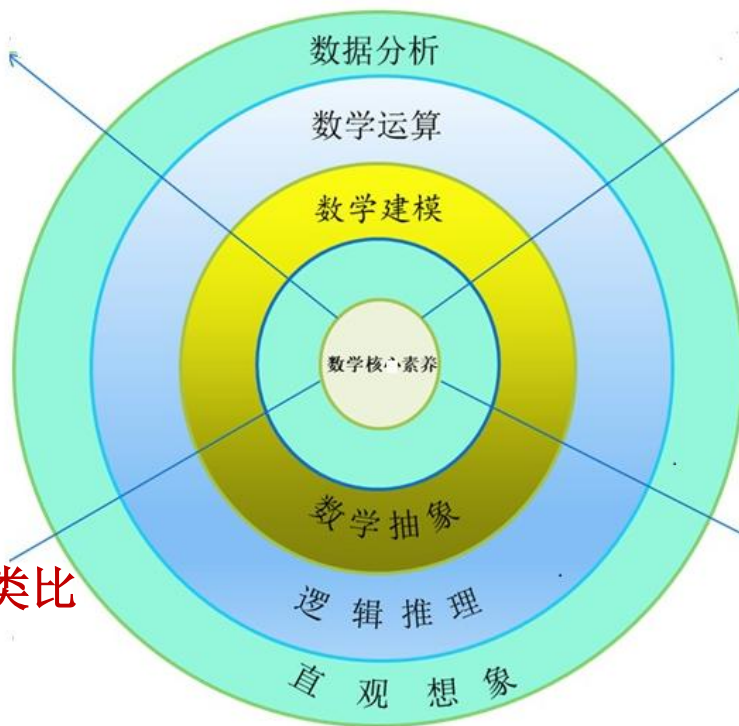
$$25873 \times 10 = 258730 \text{元}$$



九、总结升华

知识：等额本金还款法
等额本息还款法

方法：特殊到一般



思想：转化与化归、类比

能力：数学建模能力
逻辑思维能力
运算求解能力
创新能力