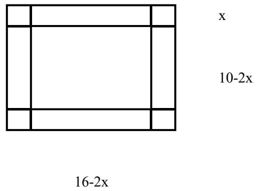
巧用平均值不等式求最值三例

苏清军

利用平均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 或 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, $(a,b,c \in R^{+})$ 求最值时，需要保证满足① a,b,c 是正变数；②积(或和)是一个常数；③不等式的等号能够成立。

在解题时，为保证以上条件一一满足，恰当、灵活地对题设或结论进行变形尤为重要。下面通过三个例子，说明几种行之有效的变形方法。

例 1， 设有一张长$16m$ ，宽$10m$ 的长方形铁板从它的四角各剪去一个小正方形，制成一个长方体无盖容器，小正方形的边应该是多长，才能使长方体的容积最大？



析：设剪去的正方形边长是 xm ，于是盒子的容积

$$V = x(10-2x)(16-2x) = 4x(5-x)(8-x) \qquad ①$$

显然①式中 $x+(5-x)+(8-x)=13-x \neq$ 常数，怎样匹配各项的系数，使和为常数是关键。

这样对①式进行变形 $V = 4(ax)(5b-bx)(8-x)\frac{1}{ab}$

$$\leq \frac{4}{ab}\left(\frac{(a-b-1)x+5b+8}{3}\right)^{3} \qquad ②$$

为使②式为定值，而且不等式的等号成立，应有

$$\begin{cases} a-b-1=0 & ③ \\ ax = 5b-bx = 8-x & ④ \end{cases}$$

由④得 $x = \frac{8}{a+1} = \frac{5b-8}{b-1}$ ⑤

联立③、⑤解得 $a=3, b=2$ ，此时 $x=2$

故 $V_{\max} = \frac{4}{3\times 2}\left[\frac{5\times 2+8}{3}\right]^{3} = 144cm^{3}$

解：设剪去的正方形边长是 xm ，于是盒子的容积

$$V = x(10-2x)(16-2x) = \frac{2}{3}(3x)(10-2x)(8-x)$$

$$\le \frac{2}{3}[\frac{3x+10-2x+8-x}{3}]^3=\frac{2}{3}6^3=144cm^3$$

当且仅当 $3x=10-2x=8-x$，即 $x=2$ 时，上式取等号。

$V_{\max}=144cm^3$。

因此,从长方体铁板的四角各减去一个边长为 2 的小正方形，制成的长方体容积最大。

例 2， 求函数 $y=x+\frac{1}{x},x\in[2,+\infty)$ 的最小值。

析：$y=x+\frac{1}{x}\ge 2$,而方程 $x=\frac{1}{x}$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上无解，所以等号不能成立。

很多资料上利用函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象、性质来求解，但这一函数始终未在教科书中出现。这里对函数式作适当变形

$$y=x+\frac{1}{x}=x+\frac{4}{x}-\frac{3}{x}\ge 2\sqrt{x\frac{4}{x}}-\frac{3}{x}$$

$x+\frac{4}{x}$ 与 $-\frac{3}{x}$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 同时取的最小值，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，$y_{\min}=2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

注：一般地，函数 $f(x)=x+\frac{k}{x},(0<k<c)$ 在 $x\in[\sqrt{c},+\infty)$ 上的最小值：

$f(x)=x+\frac{k}{x}=x+\frac{c}{x}+\frac{k-c}{x}$， $x+\frac{c}{x}$ 与 $\frac{k-c}{x}$ 在 $x=\sqrt{c}$ 时同时取得最小值 $2\sqrt{c}+\frac{k-c}{\sqrt{c}}=\sqrt{c}+\frac{k}{\sqrt{c}}$。

例 3， 已知 $x>0,y>0,$ 且 $x+y=xy$，求 $u=x+4y$ 的范围。

解：$\because x+y=xy$ 变形为 $x+y-xy-1=-1$

左边因式分解得 $(x-1)(1-y)=-1$

$\therefore (x-1)(y-1)=1$

$(x-1)(4y-4)=4$

于是 $u=x+4y=(x-1)+(4y-4)+5$

$$\geq 2\sqrt{(x-1)(4y-4)}+5=2\sqrt{4}+5=9$$

当且仅当 $x-1=4y-4=2$，即 $x=3, y=\frac{3}{2}$ 时，等号成立。

所以 $u\in\left[9,+\infty\right)$ 。

紧扣平均值不等式成立的条件，适当配凑求最值，较其他方法简便。运用上述方法，解决下面题目尤为方便。

若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是____。

解：由 $ab=a+b+3$ 变形得积 $(a-1)(b-1)=4$

$\therefore ab=a+b+3=(a-1)+(b-1)+5\geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)}+5$

$=2\times 2+5=9$

$\therefore ab\in\left[9,+\infty\right)$

此题若改为求 $a+b$ 的取值范围, 请读者思考解决。（答案 $\left[6,+\infty\right)$）