是“互斥事件”还是“相互独立事件”

苏清军

猎人在距离100米处射击一只奔跑着的野兔，命中率为$\frac{1}{2}$. 如果第一次未中，则进行第二次射击，但距离为150米，如果又未中，则进行第三次射击，但距离为200米. 若第三次未中，则不再射击. 已知猎人的命中率与距离的平方成反比，求命中野兔的概率.

这是笔者在一资料上看到的题目，文章作者的分析及解答如下：

记事件“第一次命中野兔”为A_1，事件“第二次命中野兔”为A_2，事件“第三次命中野兔”为A_3，事件“命中野兔”为B.

由于猎人的命中率P与距离x的平方成反比，故可设$P(x)=\frac{k}{x^2}$

据题意$P(A_1)=P(100)=\frac{k}{100^2}=\frac{1}{2}$，得$k=5000$，$\therefore P(x)=\frac{5000}{x^2}$

当$x=150$米时，$P(A_2)=P(150)=\frac{5000}{150^2}=\frac{2}{9}$

当$x=200$米时，$P(A_3)=P(200)=\frac{5000}{200^2}=\frac{1}{8}$

这里事件A_1，A_2，A_3 彼此互斥，

$\therefore B=A_1+A_2+A_3$

$\therefore P(B)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{61}{72}$.

乍看起来，上面解法蛮有道理，其实他混淆了两类事件.

试想若三枪仍未击中，则就有第四枪、第五枪、第六枪……

分别记第四枪击中为事件A_4，第五枪击中为事件A_5，第六枪击中为事件A_6

则有$P(A_4)=P(250)=\frac{5000}{250^2}=\frac{2}{25}$　　　$P(A_5)=P(300)=\frac{5000}{300^2}=\frac{1}{18}$

$P(A_6)=P(350)=\frac{5000}{350^2}=\frac{2}{49}$

但$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=1.023>1$

认为事件A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 彼此互斥，由概率公式简单相加显然是错误的.

这是文中错误地认为$P(A_2)=P(150)=\frac{2}{9}$，$P(A_3)=P(200)=\frac{1}{8}$所致.

试想，猎人站在100米处射击，命中野兔；猎人站在150米处射击，命中野兔；猎人站在200米处射击，命中野兔……当然是距离越远，命中率越低，彼此是相互独立的．这里“在150米处命中野兔”与“第二次命中野兔”、“在200米处命中野兔”与“第三次命中野兔”，是完全不同的两类事件．在150米处命中野兔的概率是$\frac{2}{9}$，首先要具备开第二枪的机会，这样的机会发生的概率为$1-P(A_1)=\frac{1}{2}$，所以“第二次命中野兔”的概率就应该是$(1-P(A_1))\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$．同样，“第三次命中野兔”的概率就应该是$(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{9})\times\frac{1}{8}=\frac{7}{144}$．

据此，文中所设事件A_1、A_2、A_3，$P(A_2)\neq P(150)=\frac{2}{9}$，$P(A_3)\neq P(200)=\frac{1}{8}$．

现在我们不妨这样去设，事件“猎人在100米处命中野兔”为A_1，“猎人在150米处命中野兔”为A_2，“猎人在200米处命中野兔”为A_3，“命中野兔”为B．

显然“第二次命中野兔”为事件$\overline{A_1}\cdot A_2$发生，“第三次命中野兔”为事件$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$发生，其中$A_1$，$A_2$，$A_3$是相互独立的

$\because\ P(A_1)=\frac{5000}{100^2}=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{5000}{150^2}=\frac{2}{9}$，$P(A_3)=\frac{5000}{200^2}=\frac{1}{8}$，

$B=A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$

$\therefore P(B)=P(A_1)+P(\overline{A_1}\cdot A_2)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)$

$=P(A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)$

$=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{9}+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{9})\times\frac{1}{8}=\frac{95}{144}$

当然也可以这样去解

$P(B)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{9})\times(1-\frac{1}{8})=\frac{95}{144}$

上面问题要与数学课本第二册（高二下B）p150第3题区别开：

某家庭电话在家中有人时，打进的电话响第1声时被接的概率为0.1，响第2声时被接的概率为0.3，响第3声时被接的概率为0.4，响第4声时被接的概率为0.1，那么电话在响前4声内被接的概率是多少？

在本题中，响第2声时被接就相当于上例中的$\overline{A_1}\cdot A_2$，$P(\overline{A_1}\cdot A_2)=0.3$

响第3声时被接就相当于上例中的$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$，$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=0.4$

响第4声时被接就相当于上例中的$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4$，$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)=0.1$

由于A_1，$\overline{A_1}\cdot A_2$，$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$，$\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4$彼此互斥

所以，电话在前 4 声内被接的概率$P=0.1+0.3+0.4+0.1=0.9$

下面再举一例，可作练习：

多项飞碟是奥运会竞赛项目之一，它是由抛靶机把碟靶（射击的目标）在一定范围内从不同的方向抛出，每抛出一个碟靶，就允许运动员射击两次。一运动员在进行训练时，每一次射击命中碟靶的概率P与运动员离碟靶的距离S（米）成反比，现有一碟靶飞出后S（米）与飞行时间t（秒）满足$S=15(t+1)\quad(0\le t\le 4)$。假设运动员在碟靶飞出后$0.5$秒进行第一次射击，且命中的概率为$0.8$，如果他发现没有命中，则通过迅速调整，在第一次射击后经过0.5秒进行第二次射击，求他命中此碟靶的概率.（答案0.92）