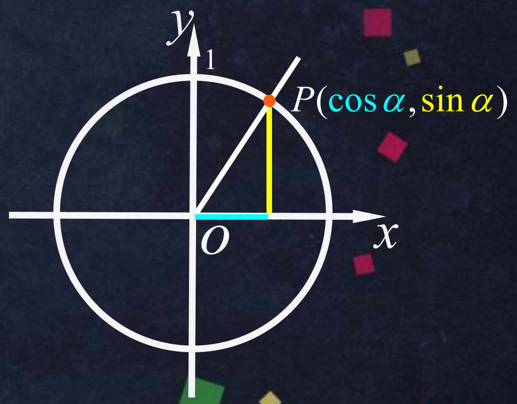
已知三角函数值求角

高一年级 数学

黄海龙　王雪美

东营市第一中学



问题：已知任意一个角（角在三角函数定义域内），可以求出它的三角函数值；反过来，已知一个三角函数值，可以求出与它对应的角吗？

$$\boxed{\text{三角函数值}} \underset{?}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \boxed{\text{角}}$$

学习目标

学习目标：

1.掌握已知三角函数值（值的范围）求角（角的范围）的方法并会用符号arcsinx，arccosx，arctanx表示角；

2.会利用计算器求角并进行相关计算.

学习重点：会利用单位圆三角函数线求对应的角.

学习难点：

1.正确利用单位圆三角函数线求对应满足条件的角；

2.会用符号arcsinx,arcsiny,arctanx表示角.

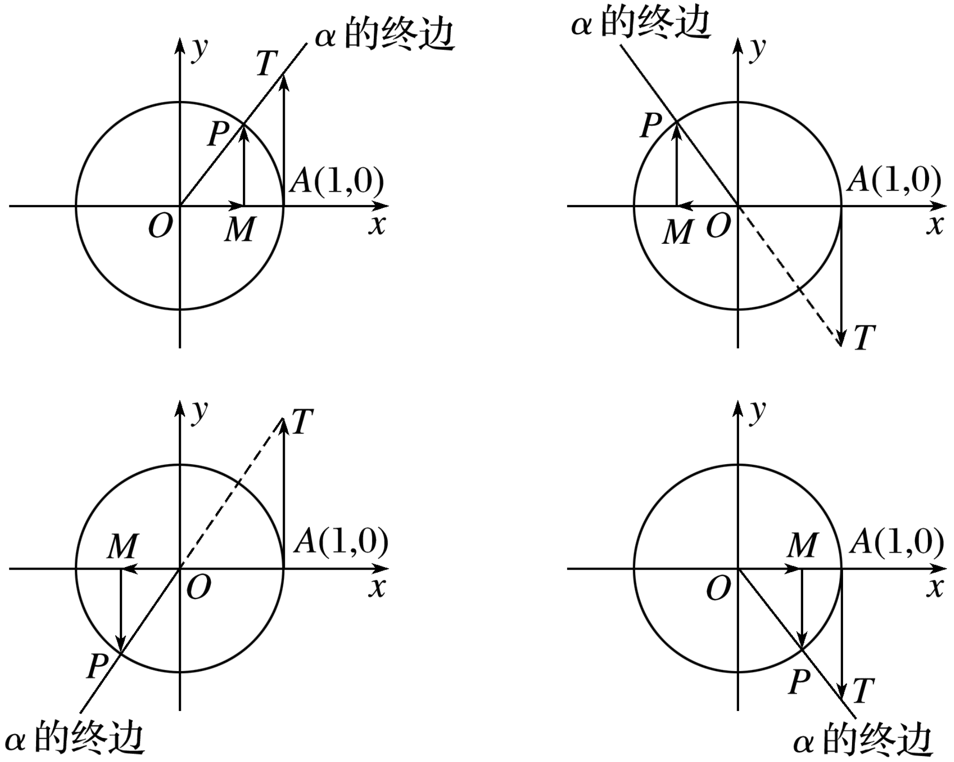
复习回顾 温故知新

1. 任意角的三角函数

任意角的三角函数的定义：设 $P(x, y)$ 是角 α 终边上异于原点的任意一点，其到原点 O 的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$\sin\alpha=$ $\underline{\ \frac{y}{r}\ }$，$\cos\alpha=$ $\underline{\ \frac{x}{r}\ }$，$\tan\alpha=$ $\underline{\ \frac{y}{x}\ }$ $(x\neq 0)$.

2. 三角函数线



角 α 的终边与单位圆交于点 P，过 P 作 PM⊥x 轴，M 为垂足，点 A(1,0)，直线 x＝1 与角 α 终边所在直线交于点 T，如图.

则角α的正弦线为 $\underline{\ \overrightarrow{MP}\ }$，余弦线为 $\underline{\ \overrightarrow{OM}\ }$，正切线为 $\underline{\ \overrightarrow{AT}\ }$.

创设情境，提出问题

简车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理. 因其经济又环保，至今还在农业生产中得到使用. 假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都做匀速圆周运动.

创设情境，提出问题

为方便研究，我们构建出筒车的数学模型并给出以下条件：

筒车转轮的中心o到水面的距离 h_0，筒车的半径r=1，逆时针方向匀速转动，转动一周需要360秒。(这里的角速度多少?即一秒转动多少度?)从初始位置点A出发(圆周与x轴正半轴的交点)

(1) 求经过时间x秒后，点P相对于水面的高度h的表达式.

(2) 假设 $h_0=0$ ，求经过多少秒后P点的高度恰好等于$\frac{1}{2}$，何时$\geq\frac{1}{2}$呢？

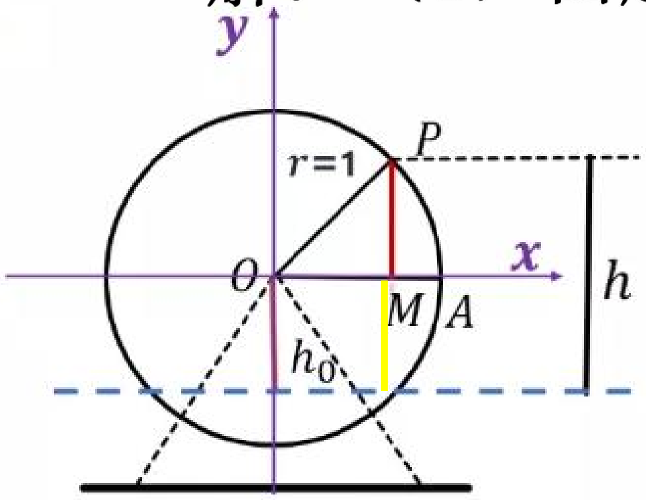


图1

解：（1）由题意可得 $h=h_0+MP$

$$=h_0+\sin x$$

（2） $\sin x=\frac{1}{2}$;

$$\sin x\geq\frac{1}{2}.$$

创设情境，提出问题

尝试与发现

(1)已知 $\sin \boxed{x}=\boxed{\frac{1}{2}}$，你能求出满足条件的角$x$吗？

(2)已知 $\sin \boxed{x} \geqslant \boxed{\frac{1}{2}}$，你能求出$x$的取值范围吗？

问题：用哪些知识和方法能解决这个问题？

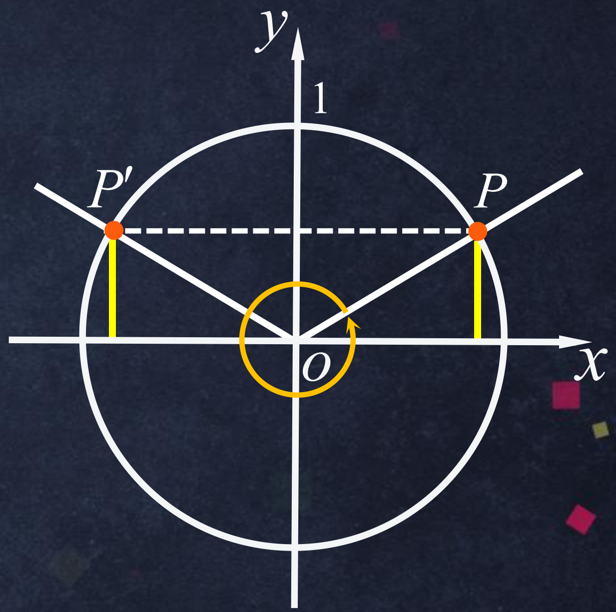
深入探究，解决问题

已知正弦值求角.

数形结合

问题：坐标系中哪些信息对应 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 中的x与 $\dfrac{1}{2}$？

视角一：三角函数定义 → 单位圆



数　正弦值　　　　　　　　　　角x值
　　对应　　　　　　　　　　　对应
形　纵坐标 —— 点P —— 角的终边

深入探究，解决问题

已知正弦值求角.

（1）已知 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，你能求出满足条件的角 x 吗？

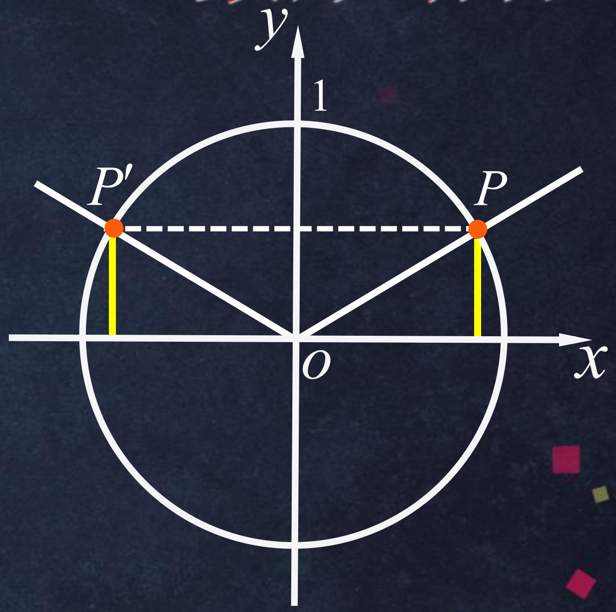
问题：方程有几个解？怎样表达？

解的分类：终边与 OP 重合 $x=\boxed{\dfrac{\pi}{6}}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$;

终边与 OP' 重合 $x=\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$[0,2\pi]$

数形结合



深入探究，解决问题

已知正弦值的范围，求角的范围.

数形结合

（2）已知 $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$，你能求出$x$的取值范围吗？

视角一：三角函数定义 → 单位圆

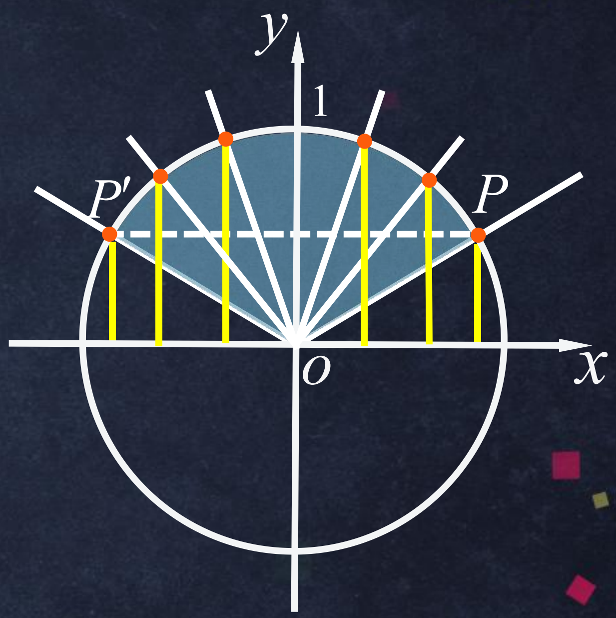
形

数

$$\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$$

$+2k\pi$

从OP逆时针旋转到OP' ⟺ $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$



深入探究，解决问题

尝试与发现

(1)已知 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，你能求出满足条件的角x吗？

(2)已知 $\sin x\geqslant\dfrac{1}{2}$，你能求出$x$的取值范围吗？

问题：用哪些知识和方法能解决这个问题？

视角一：三角函数定义（单位圆三角函数线）

视角二：正弦函数图像与性质

函数 $y=f(x)$

方程 $f(x)=a$

不等式 $f(x)\geqslant a$

（不等号也可以是 <、≤、>）

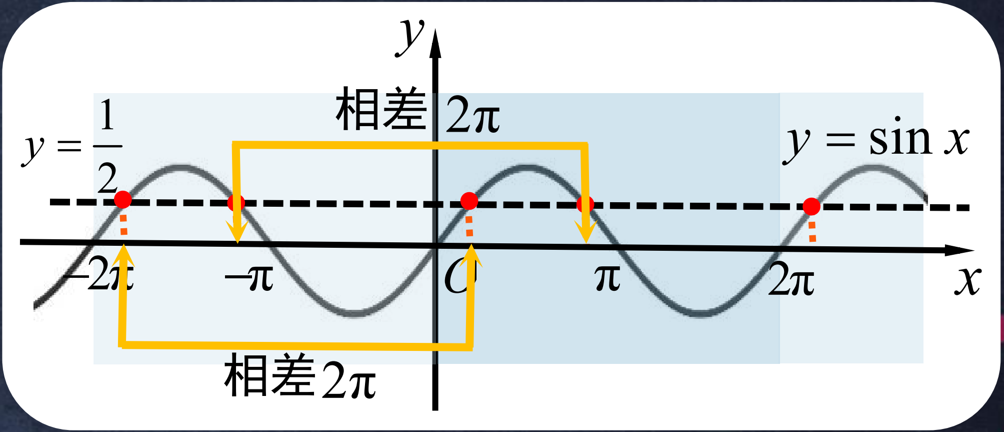
深入探究，解决问题

已知正弦值（范围），求角的值（范围）.

(1)已知 $\sin x=\frac{1}{2}$，求满足条件的角 x .

(2)已知 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，求 x 的取值范围.

数形结合



视角二： $\boxed{\text{三角函数的性质与图像}}$

分析： $[0,2\pi]\longrightarrow \mathbf{R}$

$\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{5\pi}{6}\xrightarrow{+2k\pi} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，或 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$

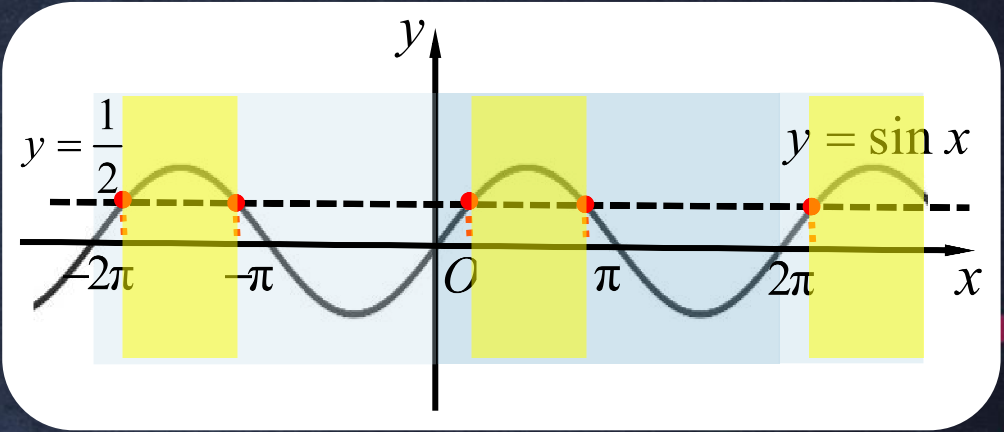
深入探究，解决问题

已知正弦值（范围），求角的值（范围）.

数形结合

(1)已知 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，求满足条件的角 x .

(2)已知 $\sin x\geqslant\dfrac{1}{2}$，求$x$的取值范围.



视角二： $\boxed{\text{三角函数的性质与图像}}$

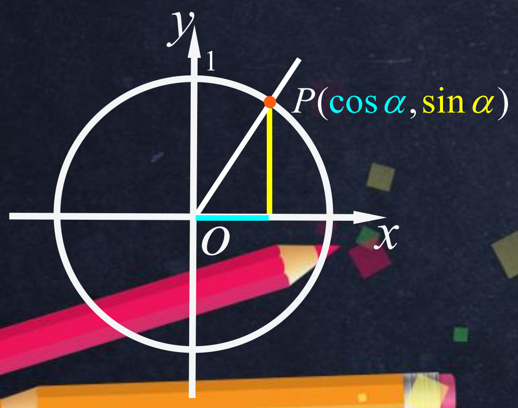
分析： $[0,2\pi]\longrightarrow\mathbf{R}$

$$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}\xrightarrow{+2k\pi}\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$$

深入探究，解决问题

已知正弦值（范围），求角的值（范围）.

单位圆三角函数线
正弦函数图像
依据 → 已知三角函数值求角 步骤 → 一个周期内 → 定义域内



学以致用，例题研讨

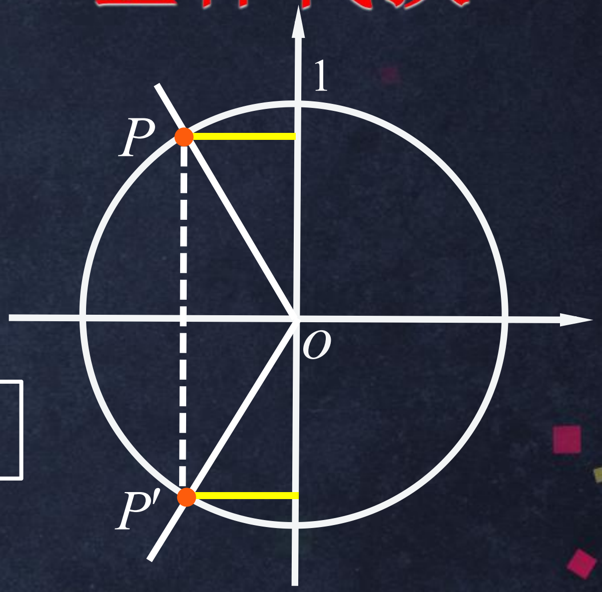
已知余弦值（范围），求角的值（范围）.

例1 已知$\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，求角$x$.

学以致用，例题研讨

已知余弦值（范围），求角的值（范围）.

整体代换



例1 已知$\cos\boxed{(2x+\frac{\pi}{3})}=-\frac{1}{2}$，求角$x$.

分析:

数 余弦值 → $(2x+\frac{\pi}{3})$整体 → 角x值

形 横坐标 → 点P → 角的终边

学以致用，例题研讨

已知余弦值（范围），求角的值（范围）.

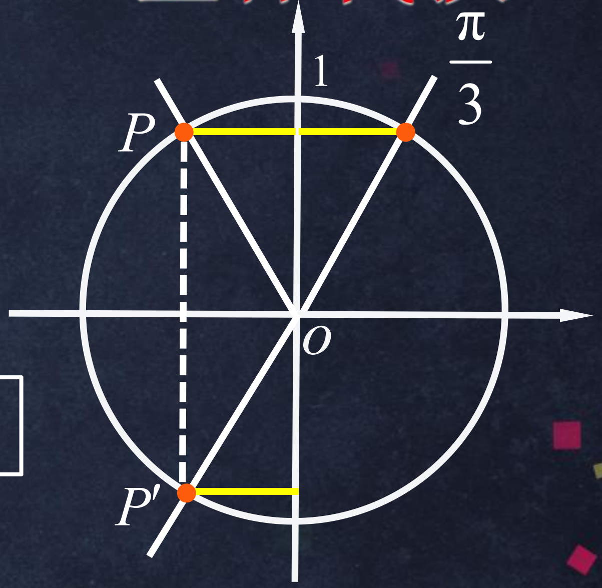
整体代换

例1　已知$\cos\boxed{\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{2}$，求角$x$.

分析：$\cos u=-\frac{1}{2}$ ⟶ $[0,2\pi]$内，$u=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$

数　余弦值 ⟶ $\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$整体 ⟶ 角$x$值

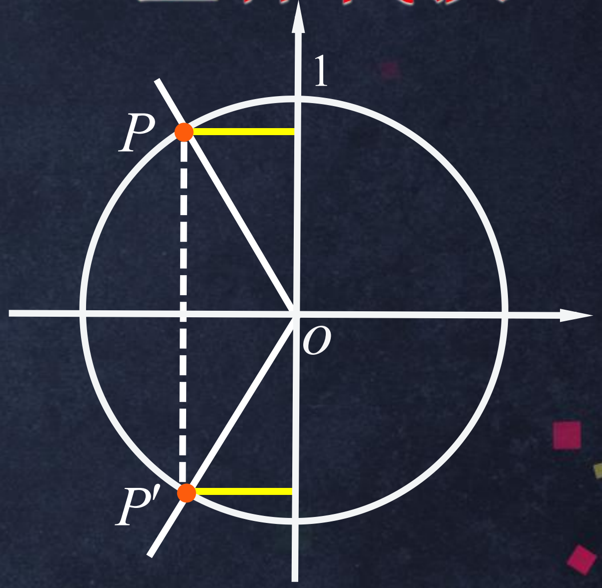
形　横坐标 ⟶ 点P ⟶ 角的终边



学以致用，例题研讨

已知余弦值（范围），求角的值（范围）.

整体代换



例1 已知$\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，求角$x$.

解：因为$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

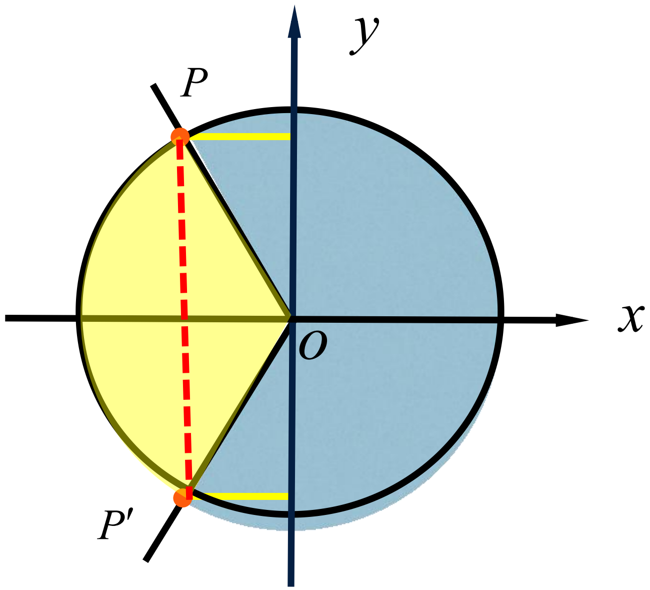
$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

所以，在$\mathbf{R}$上x的取值集合是

$$\left\{x \mid x=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ 或 } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$$

学以致用，例题研讨

整体代换

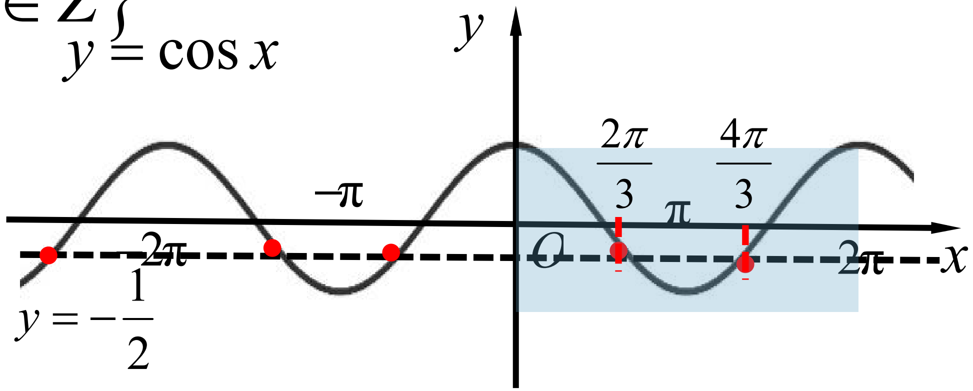


变式： 若$\cos(2x+\frac{\pi}{3})\leq -\frac{1}{2}$,求角$x$的取值范围.

解:由$\frac{2}{3}\pi+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{4}{3}\pi+2k\pi$

解得:$\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k\pi$;

所以不等式的解集为$\{x/\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$



学以致用，例题研讨

已知正切值（范围），求角的值（范围）.

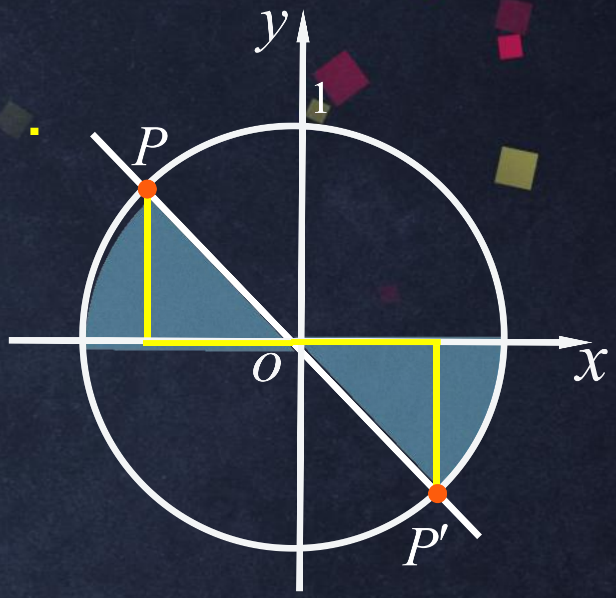
例2 若已知 $\tan x=-1, x\in(3\pi,5\pi)$，求角 x .

y

x

学以致用，例题研讨

已知正切值（范围），求角的值（范围）.

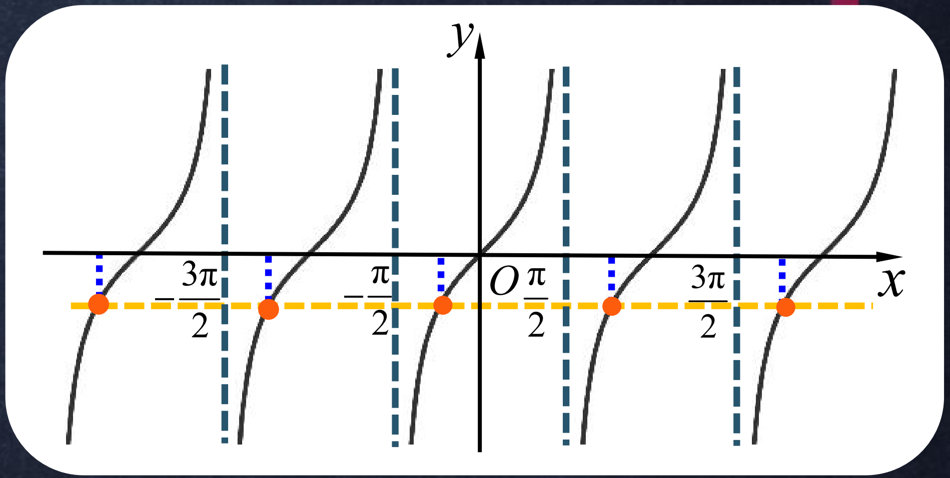


例2若已知$\tan x=-1, x\in(3\pi,5\pi)$，求角$x$.

解：因为$\tan(-\frac{\pi}{4})=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，所以，$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

又由 $3\pi<-\frac{\pi}{4}+k\pi<5\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 可知，$k=4$ 或 $k=5$

所以x的取值集合是$\left\{\frac{15\pi}{4},\frac{19\pi}{4}\right\}$.



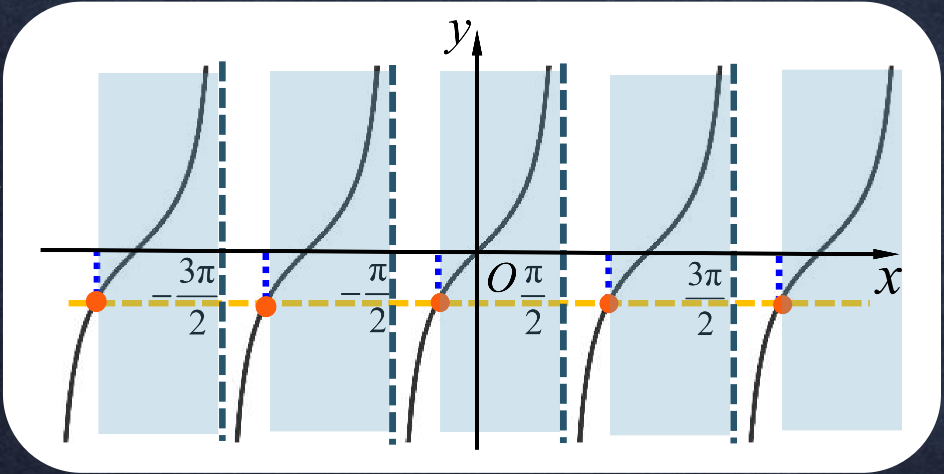
学以致用，例题研讨

已知正切值（范围），求角的值（范围）.

满足$\tan x=-1$的x的取值集合是$\left\{x \mid x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$；

满足$\tan x>-1$ 的x的取值集合是 $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in \mathbf{Z}$.

正切函数图像



创设情境，提出问题

为方便研究，我们构建出筒车的数学模型并给出以下条件：

筒车转轮的中心O到水面的距离 h_0，筒车的半径r=1，逆时针方向匀速转动，转动一周需要360秒。(这里的角速度多少?即一秒转动多少度?)从初始位置点A出发(圆周与x轴正半轴的交点)

(3)假设 $h_0=0$，求经过多少秒后P点的高度恰好等于$\frac{1}{3}$呢?

解：（1）由题意可得 $h=h_0+\sin x$

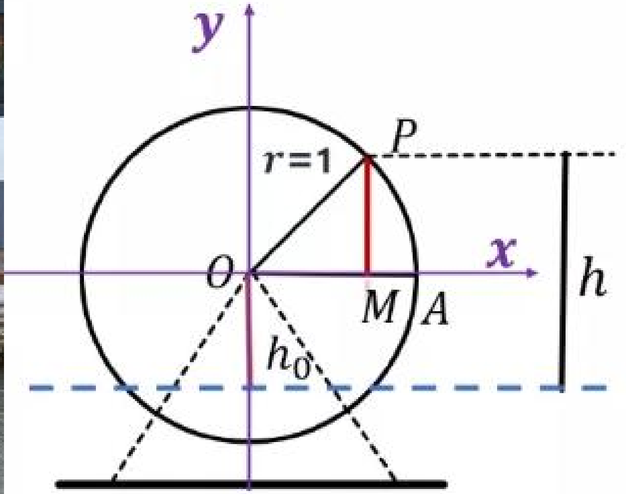


图1

（3） $\sin x=\frac{1}{3}$;

回顾：指数函数与对数函数概念之间的关系

指数函数 $y = a^x\ (a>0$，且 $a \neq 1)$

什么样的函数存在反函数呢？

指数换

对数

$x = \log_a y$

反

函

数

交 换

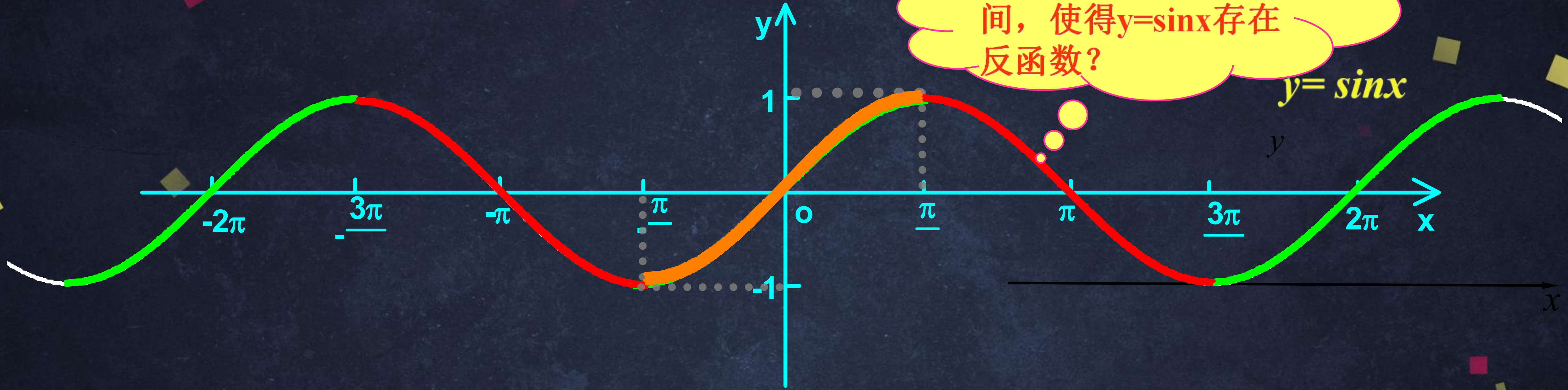
x、y

对数函数 $y = \log_a x\ (a>0$，且 $a \neq 1)$.

一般地，如果在函数 $y = f(x)$ 中，给定值域中任意一个 y 的值，只有唯一的 x 与之对应，此时，称 $y = f(x)$ 存在反函数.

深入探究，解决问题

应该选取怎样的区间，使得y=sinx存在反函数？



$$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

知识深化，巩固提高

已知正弦值，求角：

对于正弦函数 $y=\sin x$，如果已知函数值 $y(y\in[-1,1])$，那么在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有唯一的 x 值和它对应，记为 $x=$ arcsiny $\left(\text{其中} -1\leqslant y\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

说明：

1、$x=\arcsin y$ $(-1\le y\le 1,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 是一个函数;

2、$x=\arcsin y$ $(-1\le y\le 1)$ 的几何意义是

表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上正弦值为y的那个角。

小试牛刀：在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,计算：

$\arcsin 0 =$ 0

$\arcsin \frac{1}{2} =$ $\frac{\pi}{6}$

$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$ $-\frac{\pi}{3}$

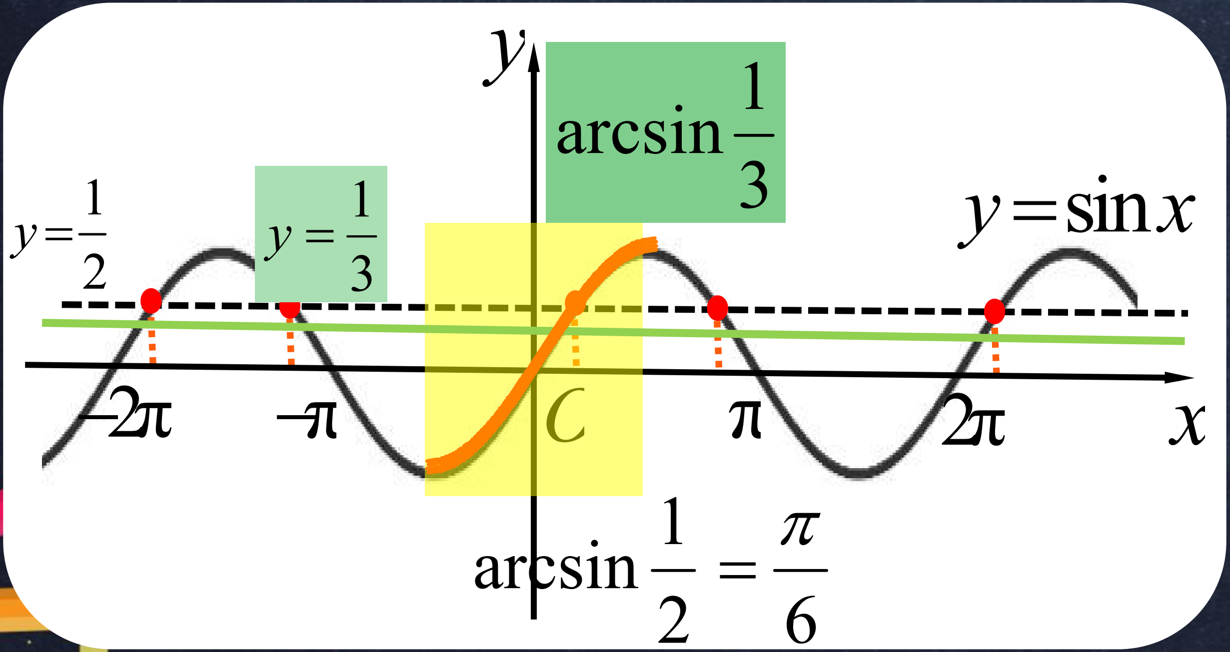
$\arcsin 1 =$ $\frac{\pi}{2}$

深入探究，解决问题

已知正弦值（范围），求角的值（范围）.

从特殊到一般

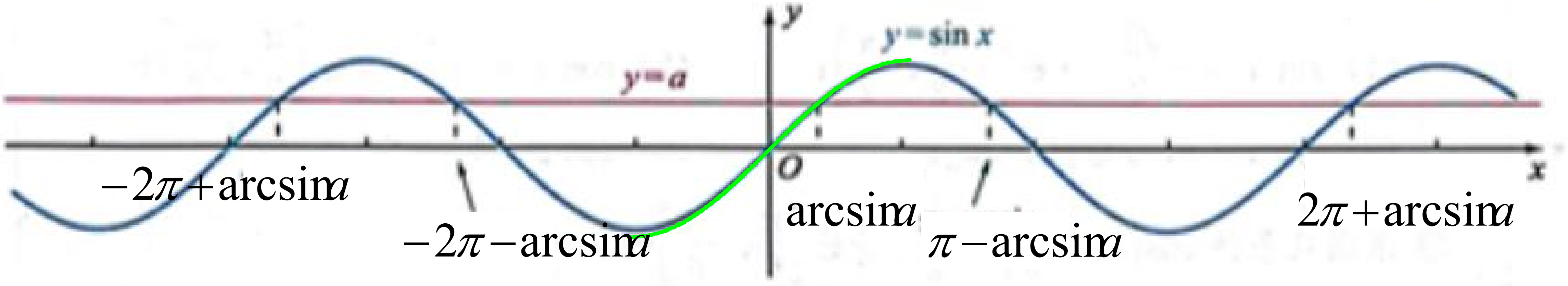
(1)已知 $\sin x = \dfrac{1}{2}$，求满足条件的 x 角 .



知识深化，巩固提高

从特殊到一般

已知$\sin x = a$（$-1 \le a \le 1$），如何求x?



解：$\{x / x = \arcsin a + 2k\pi$ 或 $\pi - \arcsin a + 2k\pi, k \in Z\}$

知识深化，巩固提高

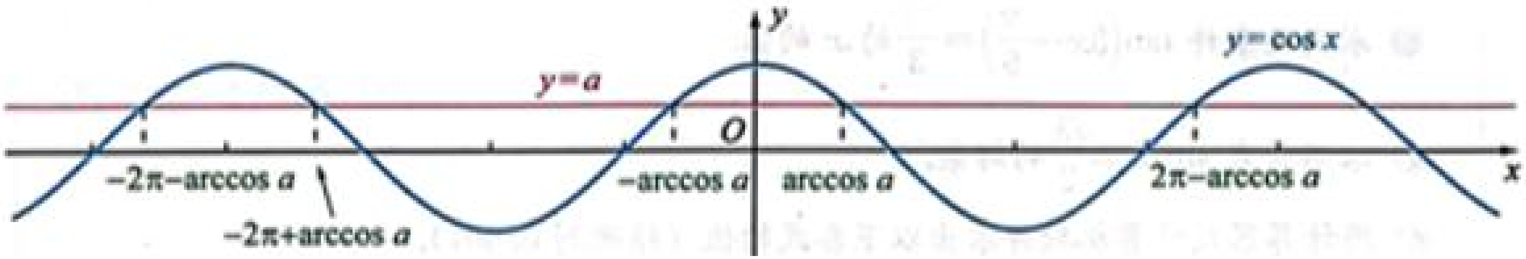
概念：

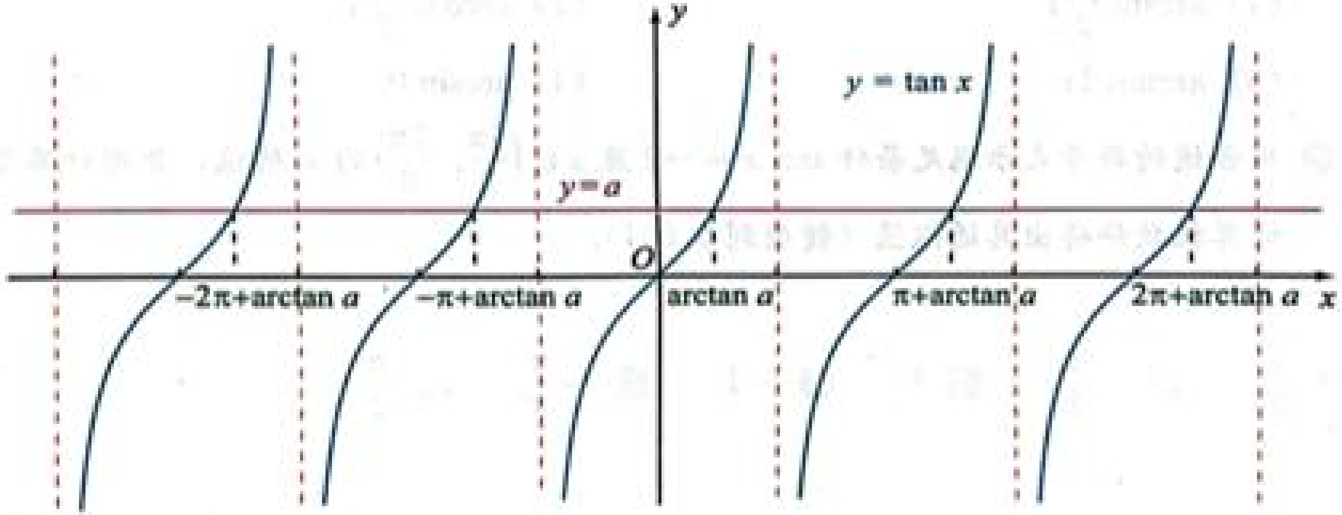
在区间$[0,\pi]$内，满足$\cos x = y(-1 \le y \le 1)$的$x$只有一个，这个$x$记作$\arccos y$，

即$x = \arccos y$.

在区间$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$内，满足$\tan x = y(y \in R)$的$x$只有一个，这个$x$记作$\arccos y$，

即$x = \arctan y$.

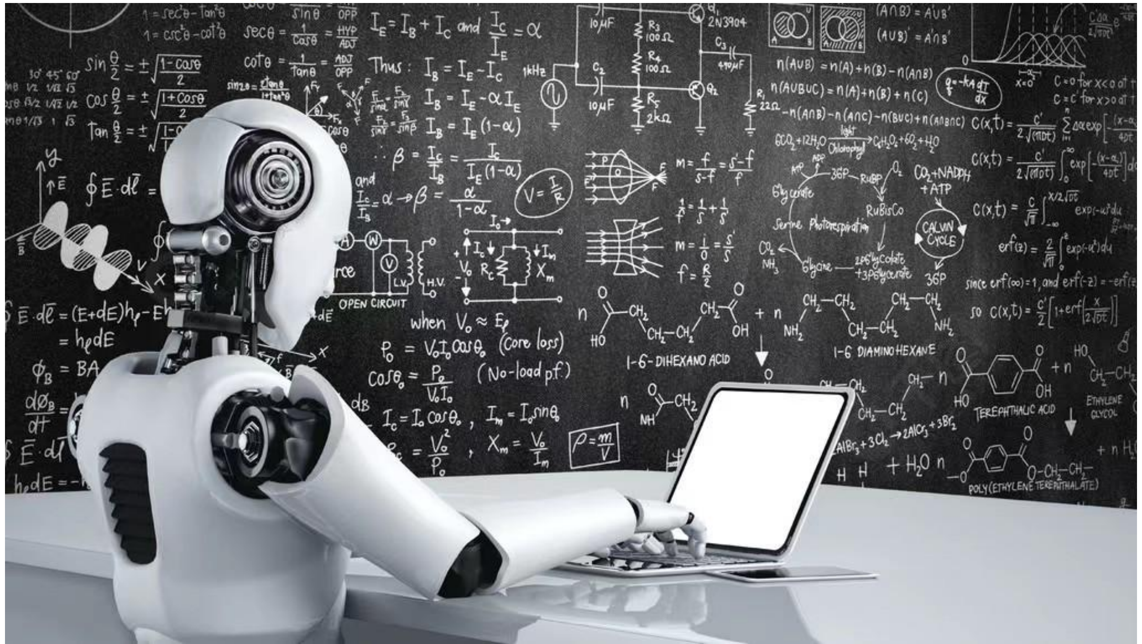




知识深化，巩固提高

计算机学科主要脱胎发源于数学学科，计算机学科中普遍采用了数学的根本概念、根本思想和根本方法，并把数学作为自己的理论根底和重要的数学工具。

在新高考背景下，数学科目学习难度大，考察范围广，在近年来高考当中也有很多新题型，为此，国家教育部门提出了更为严格明确的要求，需要加强教学实践，不断提高学生数学水平。为增强学以致用、强化体验等新课程理念，顺应素质教育要求。



已知三角函数值求角，要用到

“sin”、“cos”、“tan”键的第二功能“$\sin^{-1}$，$\cos^{-1}$，$\tan^{-1}$”和SHIFT 键。

以“度”为单位

	按键顺序	显示结果
$\sin x=\frac{1}{3}$	SHIFT sin ($\sin^{-1}$ D) (1 ÷ 3) =	19. 471 220 63
cosx=0. 8	SHIFT cos ($\cos^{-1}$ E) 0 · 8 =	36. 869 897 65
tanx=56. 78	SHIFT tan ($\tan^{-1}$ F) 5 6 · 7 8 =	88. 991 020 49

再按 °’” 键即可显示以“度、分、秒”为单位的结果.

总结升华，提升素养

通过本节课的学习你有哪些收获？

知识

思想

核心素养

步骤

方法

总结升华，提升素养

数形结合、类比推理、
从特殊到一般

思想

三角函数图像

三角函数定义

依据

已知三角函数值求角

步骤

一个周期内

定义域内

方法

整体求解

生活情境 → 方法归纳 → 知识应用

生活情境：数学抽象、数学建模

方法归纳：数据分析、逻辑推理

知识应用：数据分析、数学运算

作业布置?课下研讨

一、必做

教材P61练习 A组2,3,5;B组2,4,5

二、 选做

1.教材64页 数学建模活动

2.借助计算机软件画反三角函数的图像.

以下周期性现象与知识可供参考.

1. 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐. 一般早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋. 下面是某港口在某季节每天的时间与水深值（单位：m）记录表.

时刻	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00	24:00
水深值	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

（1）选用一个三角函数来近似地描述这个港口的水深值与时间的函数关系，给出整点时水深的近似数值；

（2）一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙（船底与海底的距离），该船何时能进入港口？在港口能停多久？

（3）某船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 m 的速度减小，那么该船在什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？