

普通高中课程标准实验教科书（人教B版 必修一）

# 2.2.4 均值不等式及其 应用（一）

（课堂教学）



情境：在农村，为防止家畜家禽对菜地的破坏，常用篱笆围成一个菜园。

1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最短的问题。最短是? m；

2. 如果用一段长为 $36\text{m}$ 的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最大的问题。最大是?  $\text{m}^2$ ；



## 实验探究1：动手操作

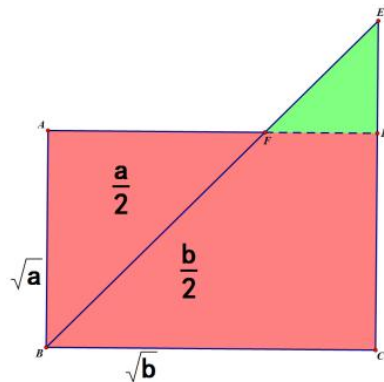
现在我们来做一个实验，请拿出准备好的两个正方形纸张，记一张面积为 $a$ ，另一张面积为 $b$ 。把两张纸张沿对角线对折，把对折后的两部分纸张沿对角线靠拢

问题1：图中阴影部分的总面积？

$$\frac{a+b}{2}$$

问题2：图中红色阴影部分的面积？

$$\sqrt{ab}$$

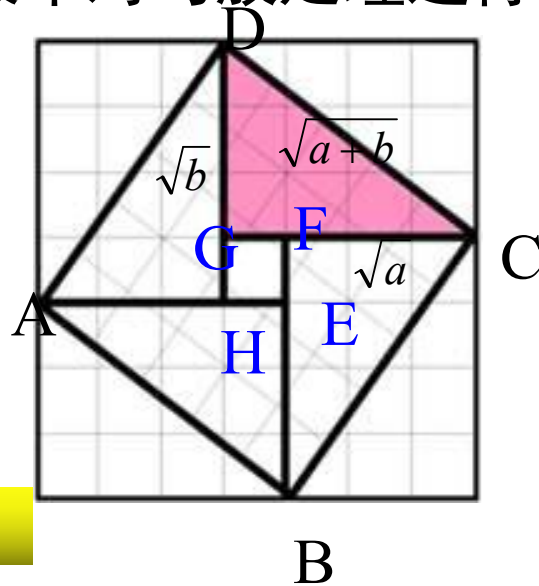
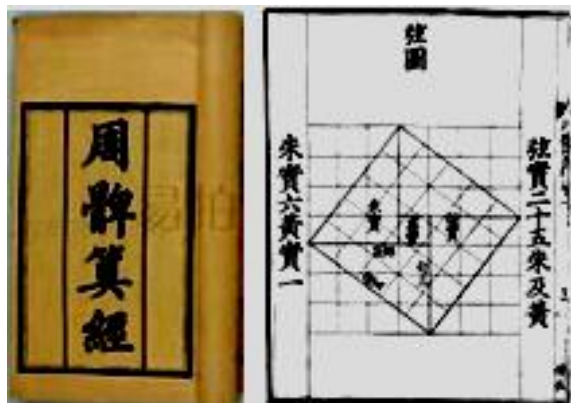


问题3：你能发现怎样的不等关系？

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

## 实验探究2: 中国古代灿烂文化

三国时期吴国赵爽，绘制此图最早对勾股定理进行了证明



问题1: 正方形ABCD的面积?

$$a+b$$

问题2: 四个直角三角形的面积之和?

$$2\sqrt{ab}$$

问题3: 你能发现怎样的不等关系?

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

均值不等式 如果 $a, b$ 都是正数, 那么

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立。

其中, 数 $\frac{a+b}{2}$ 称为 $a, b$ 的算术平均数

数 $\sqrt{ab}$ 称为 $a, b$ 的几何平均数。

**基本不等式的代数意义:** 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数

**想一想：**数缺形时少直观，形少数时难入微。代数证明是不可缺少的。

作差比较法

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

## 小组合作 探索研究

### 探索研究一：

如图,点C是AB上一点,  $AC=a$ ,  $BC=b$ , 以AB为直径作圆, O为圆心, 过点C作垂直于AB的弦DC, 连接AD、BD、OD。

①如何用a, b表示OD?

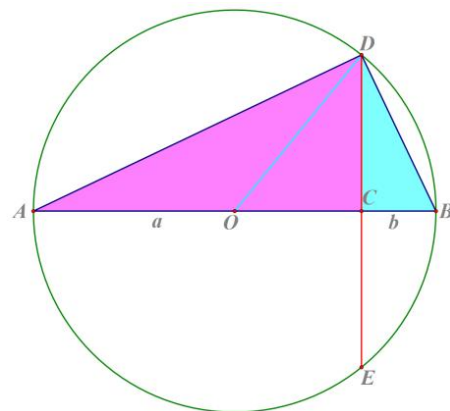
$$OD = \frac{a+b}{2}$$

②如何用a, b表示CD?

$$DC = \sqrt{ab}$$

③OD与CD的大小关系怎样?

$$OD \geq DC$$

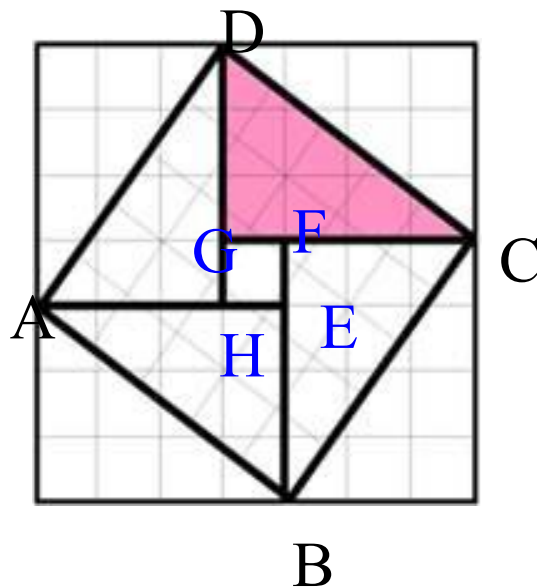


均值不等式几何意义： 半径不小于半弦长

小组合作 探索研究

探索研究二：

若直角三角形的直角边长分别为 $a, b$ 又能得到怎样的不等关系？



**重要不等式：**  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

问题1：  $a, b$  能否取任意的实数？

问题2： 等号成立的条件？

情境：在农村，为防止家畜家禽对菜地的破坏，常用篱笆围成一个菜园。

1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最短的问题。最短是?m；

2. 如果用一段长为 $36\text{m}$ 的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最大的问题。最大是? $\text{m}^2$ ；



1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最\_\_\_的问题。最短是\_\_\_m；

解：（1）设矩形的长为 $x\text{m}$ ，宽为 $y\text{m}$ ，则 $xy=100$ ，篱笆的长为 $2(x+y)\text{m}$ 。

由 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = 10$ ，可得 $2(x+y) \geq 40$ ，

当且仅当 $x=y=10$ 时等号成立，因此，这个矩形的长、宽都为 $10\text{m}$ 时，所用篱笆最短，最短篱笆是 $40\text{m}$ 。

当两个正数的积为常数时，它们的和有最小值。

2. 如果用一段长为36m的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最\_\_\_的问题。

最大是\_\_\_ $m^2$ ；

解：设矩形菜园的长为 $x m$ ，宽为 $y m$ ，则 $2(x+y)=36$ ，即： $x+y=18$ ，矩形菜园的

面积为 $xy m^2$ 。由 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 9$ 可得：

$xy \leq 81$ ，当且仅当 $x=y=9$ 时，等号成立，所以这个矩形的长和宽都为 $9m$ 时，菜园的面

积最大，最大面积是 $81m^2$ 。

当两个正数的和为常数时，它们的积有最大值。

## 题后反思:

**问题:** 结合基本不等式, 你能将本题的结论推广为更一般的情况吗?

**结论:** 设  $a > 0, b > 0$ ,

1、若  $ab = P$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,

$a + b$  有最小值  $2\sqrt{P}$ ;

2、若  $a + b = S$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,

$ab$  有最小值  $\frac{S^2}{4}$ .

**要点:** 一正二定三相等

**练习1:** (1) 把36写成两个正数的积, 当这两个正数取什么值时, 它们的和最小? 和的最小值为多少?

(2) 把16写成两个正数的和, 当这两个正数取什么值时, 它们的积最大? 积的最大值为多少?

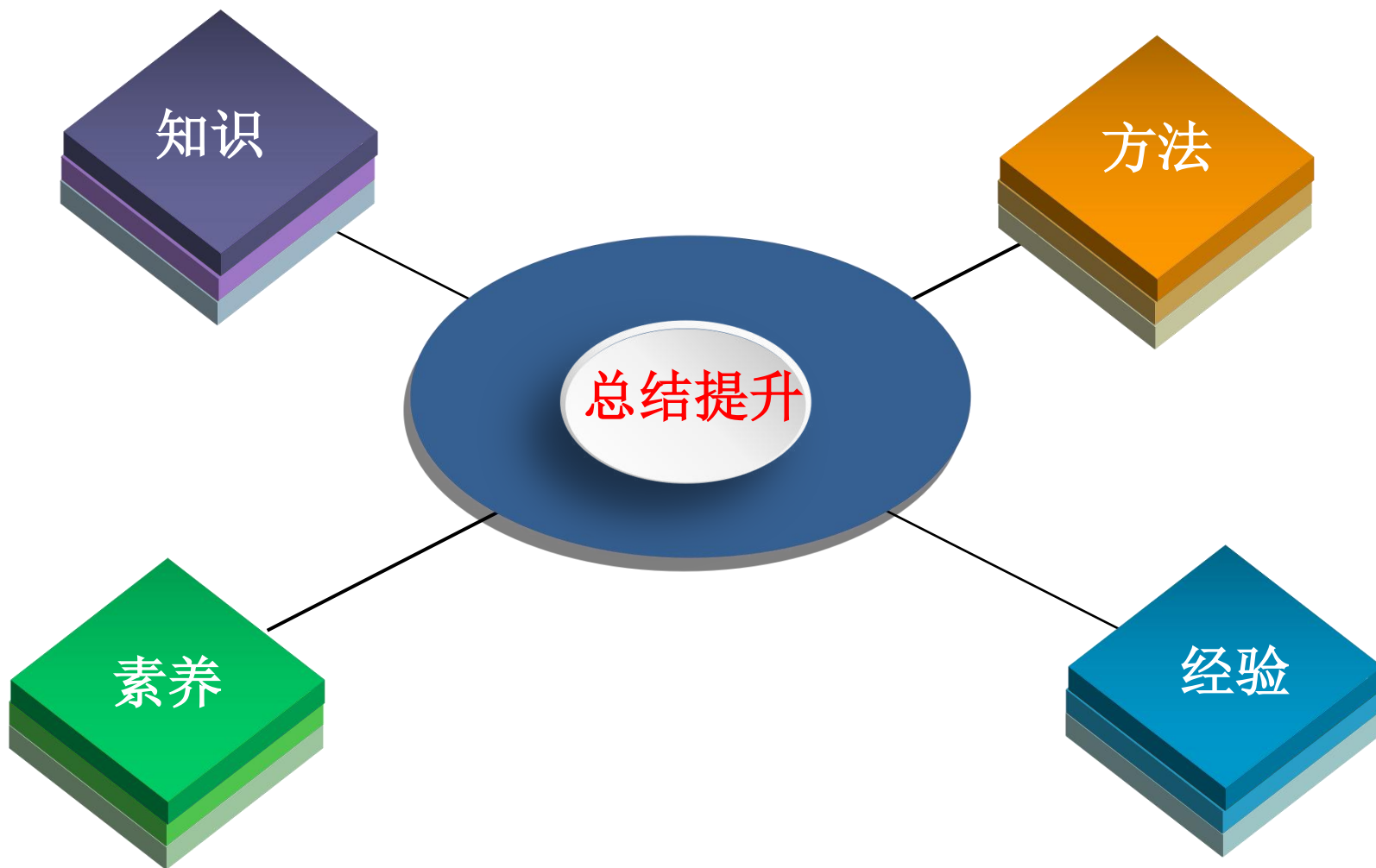
**练习2: 判断下列3个命题是否正确, 并说明理由.**

(1) 函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的最小值是 2. ✗

(2) 函数  $y = x + \frac{4}{x-2}$  ( $x > 2$ ) 的最小值是 6. ✓

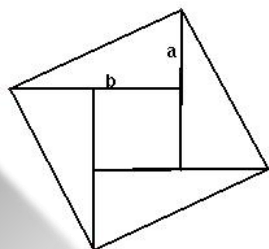
(3) 函数  $y = \sqrt{x^2+9} + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$  的最小值是 2. ✗

课堂小结 提升素养



# 知识

(当且仅当 $a=b$ 时等号成立)



几何解释

代数证明

$$(a-b)^2 \geq 0$$

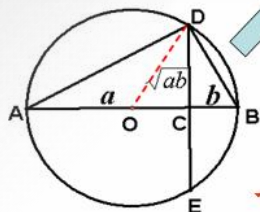
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (a, b \in R)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0)$$

几何解释

代数证明

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$



# 形

# 数

# 方法

01

数形结合

02

特殊到一般

03

分类讨论

# 素养

01 数学抽象

02 逻辑推理

03 数学建模

04 直观想象

05 数学运算

经验

定理发现、研究、证明、应用的一般性方法

1、必作题：

课本76页：A组1、2

B组2、3

2、选作题：

课本76页：B组6

课本77页：习题2-2B11

普通高中课程标准实验教科书（人教B版 必修一）

# 2.2.4 均值不等式及其 应用（一）

（教学阐述）



# C 目录

*ontents*

01

教学内容解析

02

教学目标设置

03

学生学情分析

04

教学策略分析

05

教学过程设计

1

# 教学内容解析



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 等式与不等式

等式

等式的性质与方程的解集

一元二次方程的解集及其根与系数关系

方程组的解集

不等式

不等式及其性质

不等式的解集

一元二次不等式的解法

均值不等式及其应用

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计



### 教材体系

是在学习了不等式的基础知识上学习的，是不等式这一章的核心，通过本节课的学习对后面不等式的证明及函数最值问题的解决作用巨大，起到承前启后的作用。



### 知识特点

本节课属于概念性概念性知识内容，新课程标准对它的要求是：探索并了解基本不等式的证明过程；会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题。



### 能力培养

定理发现证明推导过程中所渗透的实验探究、抽象概括，数形结合，都是培养学生数学核心素养的良好载体。



2

# 教学目标设置



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

1

### 知识与技能目标

会从不同角度探索基本不等式，会用基本不等式解决简单的最值问题

2

### 过程与方法目标

经历基本不等式的推导过程，体会数形结合、分类讨论等数学思想，提升数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学核心素养；

3

### 情感与态度目标

培养学生主动探索、勇于发现的科学精神，并在探究的过程中，体会数学的严谨性，发现数学的实用性。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

教学难点：证明基本不等式思路的获得和应用基本不等式求最值.

抓两点，破难点

一抓学生情感和思维的兴奋点，激发他们的兴趣，鼓励学生大胆猜想、积极探索；

二抓知识选择的切入点，从学生原有的认知水平和所需的知识特点入手，教师在学生主体下给予适当的提示和指导.

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 教学重点：基本不等式的推导及其简单应用

知识技能线：问题  
情境→公式推导→  
公式运用

抓三线  
突重点

能力线：观察能力→  
数学思想解决问题能  
力→灵活运用能力

过程与方法线：实验探  
究→抽象概括→数形  
结合

3

# 学生学情分析



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 已有基础

■ 学生已经学习了完全平方差公式，圆等相关知识

■ 学生已经掌握了不等式的性质和作差比较法证明不等式

■ 从图形直观初步感知性质的能力

■ 从数量关系上进行逻辑推理的能力

## 认知不足

■ 数学归纳的能力  
■ 数形结合的思想  
■ 应用解决问题的能力

# 4

## 教学策略分析



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

学生活动  
自主探究

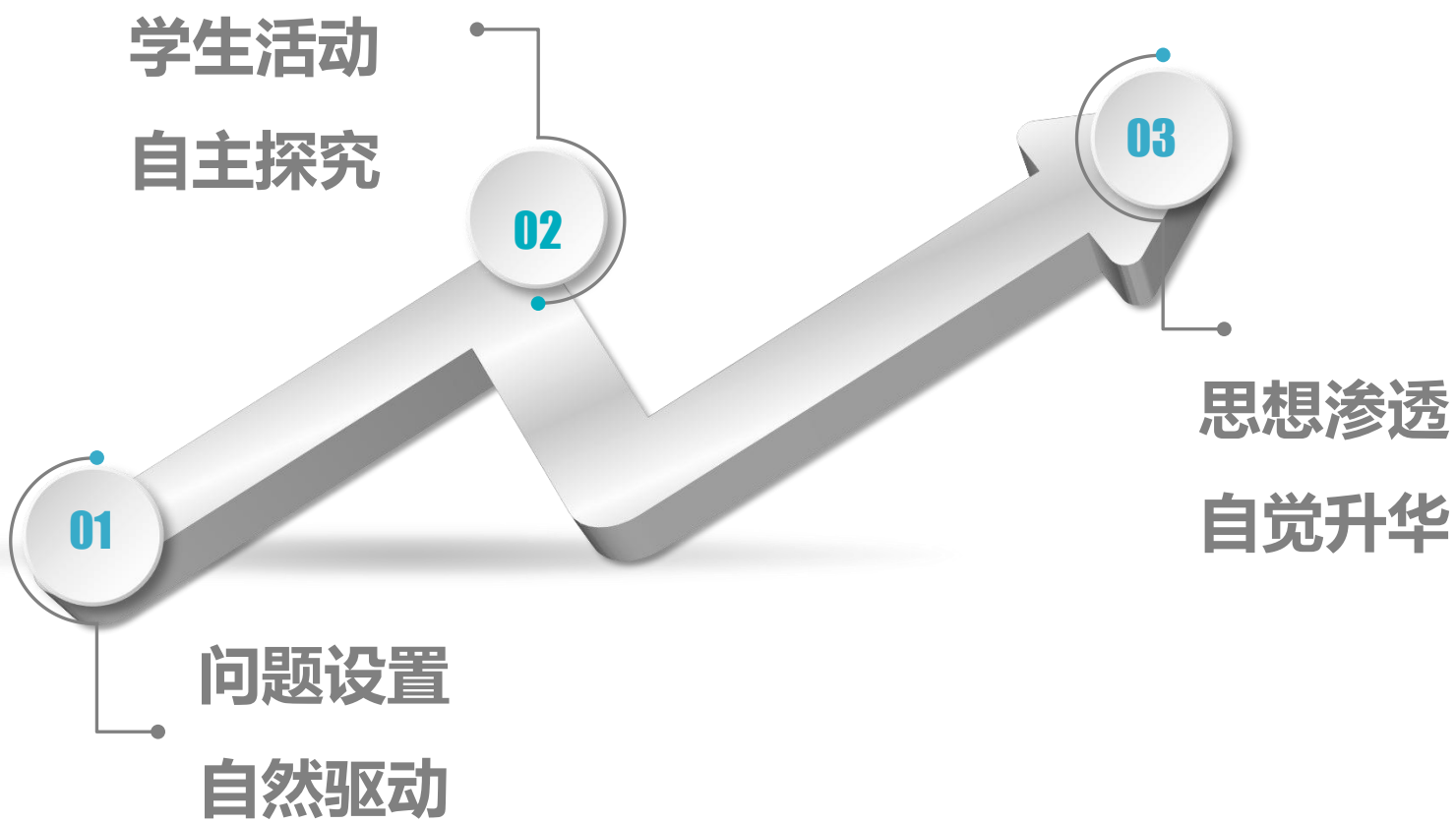
02

03

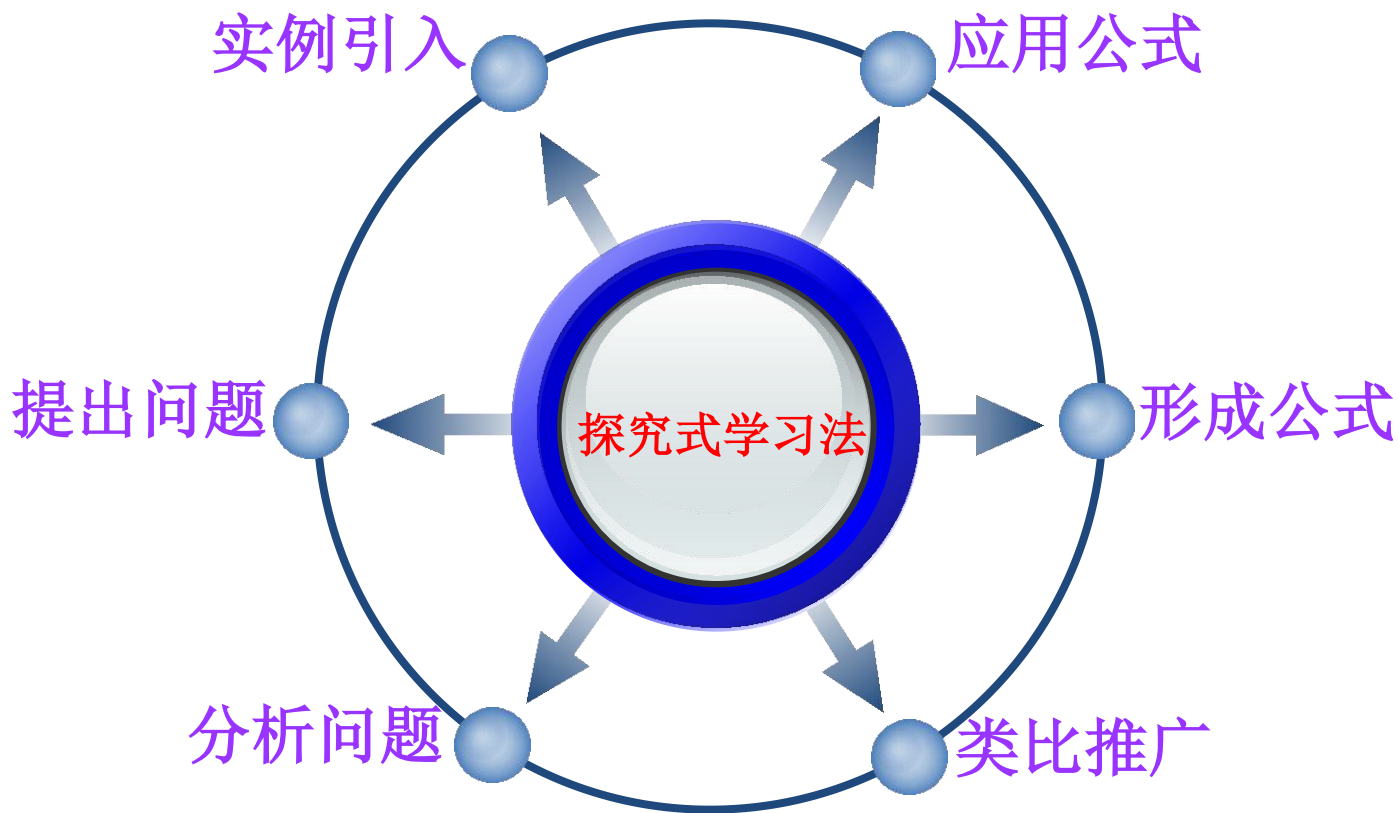
思想渗透  
自觉升华

01

问题设置  
自然驱动



本课以问题为中心，以解决问题为主线展开，学生主要采用“探究式学习法”进行学习. 本课学生的学习主要采用下面的模式进行：



5

# 教学过程设计



## 教学内容解析

## 教学目标设置

## 学生学情分析

## 教学策略分析

## 教学过程设计

· 情境创设

· 实验探究

· 小组合作

· 学以致用

· 课堂小结

· 布置作业

· 导入课题

· 自主发现

· 探索研究

· 首尾呼应

· 提升素养

· 课后提升



教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 情境创设 导入课题

情境：在农村，为防止家畜家禽对菜地的破坏，常用篱笆围成一个菜园。

1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最短的问题。最短是 ? m；
2. 如果用一段长为 $36\text{m}$ 的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最大的问题。最大是 ?  $\text{m}^2$ ；

## 设计意图

情境1提出的实际问题新颖有趣，简单易懂，贴近生活，激发学生的学习兴趣，也为第三环节实际应用埋下伏笔。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

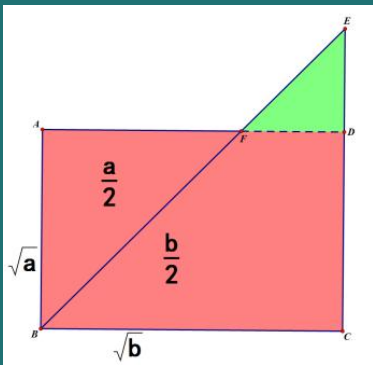
教学策略分析

教学过程设计

## 实验探究 自主发现

### 实验探究1：动手操作

现在我们来做一个实验，请拿出准备好的两个正方形纸张记一张面积为 $a$ ，另一张面积为 $b$ 。把两张纸张沿对角线对折，把对折后的两部分纸张沿对角线靠拢



问题1：图中阴影部分的总面积？

问题2：图中红色阴影部分的面积？

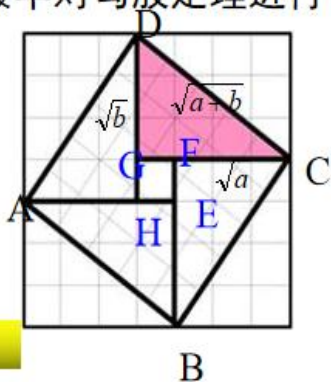
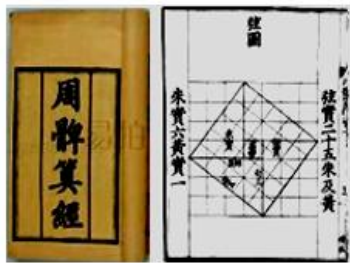
问题3：你能发现怎样的不等关系？

## 设计意图

通过动手操作，让学生动起来，课堂活起来，调动学生的积极性，刺激其探索的欲望。

### 实验探究2：中国古代灿烂文化

三国时期吴国赵爽，绘制此图最早对勾股定理进行了证明



问题1：正方形ABCD的面积？

$$a+b$$

问题2：四个直角三角形的面积之和？

$$2\sqrt{ab}$$

问题3：你能发现怎样的不等关系？

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

### 设计意图

探究2的设置不但可以通过图形再次归纳得出均值不等式，还能激发学生的爱国情怀，同时也为重要不等式的推导埋下伏笔。

## 板书定理内容:

均值不等式 如果 $a, b$ 都是正数, 那么

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立。

其中, 数 $\frac{a+b}{2}$ 称为 $a, b$ 的算术平均数

数 $\sqrt{ab}$ 称为 $a, b$ 的几何平均数。

## 设计意图

通过板书定理内容, 加深对定理内容记忆, 同时顺便给出算术平均数及几何平均数的定义。

## 设计意图

先从几何图形中的面积关系获得基本不等式，然后从代数的角度推导，实现由感性认识到理性认识的升华.引导学生从多个角度证明基本不等式，培养逻辑推理能力，小组讨论可培养学生的合作交流能力，实物投影可及时发现学生的问题.

**想一想：**数缺形时少直观，形少数时难入微。代数证明是不可缺少的。

作差比较法

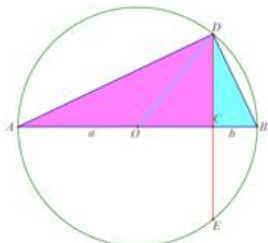
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

## 小组合作 探索研究

### 探索研究一：

如图,点C是AB上一点,  $AC=a$ ,  $BC=b$ , 以AB为直径作圆, O为圆心, 过点C作垂直于AB的弦DC, 连接AD、BD、OD。

- ①如何用a, b表示OD?
- ②如何用a, b表示CD?
- ③OD与CD的大小关系怎样?

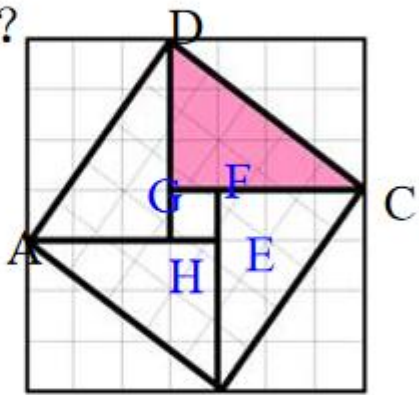


## 设计意图

根据所学过的圆和三角形相似的知识, 结合图形得出几何解释, 结合几何画板的动态演示, 既使学生从数和形的角度感受等号成立的条件, 又在同时激发着他们对数学的无限兴趣。

探索研究二：

若直角三角形的直角边长分别为 $a, b$ 又能得到怎样的不等关系？



问题1:  $a, b$  能否取任意的实数？

问题2: 等号成立的条件？

设计意图

问题的设计，可以给学生提供更多独立思考的机会，启发引导学生得出重要不等式这一不等关系。

教学内容解析

教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 学以致用 首尾呼应

情境：在农村，为防止家畜家禽对菜地的破坏，常用篱笆围成一个菜园。

1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最短的问题。最短是 ? m；
2. 如果用一段长为 $36\text{m}$ 的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最大的问题。最大是 ?  $\text{m}^2$ ；

## 设计意图

和情境前后呼应，学以致用，把两个实际问题化归为利用基本不等式求最值的数学模型，体会数学的应用价值，增强学生的学习的动力和信心。

1. 如果矩形菜园的面积为 $100\text{m}^2$ ，为节省材料，就应该考虑所用篱笆最\_\_\_的问题. 最短是\_\_\_m;

解：(1) 设矩形的长为 $x\text{m}$ ，宽为 $y\text{m}$ ，则 $xy=100$ ，篱笆的长为 $2(x+y)\text{m}$ 。

由 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}=10$ ，可得 $2(x+y) \geq 40$ ，

当且仅当 $x=y=10$ 时等号成立，因此，这个矩形的长、宽都为 $10\text{m}$ 时，所用篱笆最短，最短篱笆是 $40\text{m}$ 。

2. 如果用一段长为 $36\text{m}$ 的篱笆围成矩形菜园，为了充分利用材料，就要考虑所围菜园面积最\_\_\_的问题. 最大是\_\_\_ $\text{m}^2$ ;

解：设矩形菜园的长为 $x\text{m}$ ，宽为 $y\text{m}$ ，则 $2(x+y)=36$ ，即： $x+y=18$ ，矩形菜园的

面积为 $xy\text{m}^2$ 。由 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}=9$ 可得：

$xy \leq 81$ ，当且仅当 $x=y=9$ 时，等号成立，所以这个矩形的长和宽都为 $9\text{m}$ 时，菜园的面积

最大，最大面积是 $81\text{m}^2$ 。

## 设计意图

板演有利于及时发现学生解答中的问题，及时纠错。

## 题后反思:

**问题:** 结合基本不等式, 你能将本题的结论推广为更一般的情况吗?

**结论:** 设  $a > 0, b > 0$ ,

1、若  $ab = P$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,

$a + b$  有最小值  $2\sqrt{P}$ ;

2、若  $a + b = S$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,

$ab$  有最小值  $\frac{S^2}{4}$ .

**要点:** 一正二定三相等

## 设计意图

在学生经历例题中的两个最值问题之后, 及时提问, 培养学生题后反思的好习惯, 将特殊问题一般化, 举一反三, 总结规律, 有利于构建系统完整的知识结构.

## 巩固强化 综合提升

- 练习1:** (1) 把36写成两个正数的积, 当这两个正数取什么值时, 它们的和最小? 和的最小值为多少?  
 (2) 把16写成两个正数的和, 当这两个正数取什么值时, 它们的积最大? 积的最大值为多少?

**练习2:** 判断下列3个命题是否正确, 并说明理由.

- (1) 函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的最小值是 2. ✘
- (2) 函数  $y = x + \frac{4}{x-2}$  ( $x > 2$ ) 的最小值是 6. ✔
- (3) 函数  $y = \sqrt{x^2+9} + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$  的最小值是 2. ✘

## 设计意图

练习1设置较为基础, 主要是让学生体会用基本不等式求最值的方便之处, 也为练习2做好铺垫. 练习2可加深对用基本不等式求最值的条件的理解, 小组讨论可培养学生的合作交流能力, 小组代表回答问题可培养学生数学表达能力、概括能力和逻辑推理能力.

教学内容解析

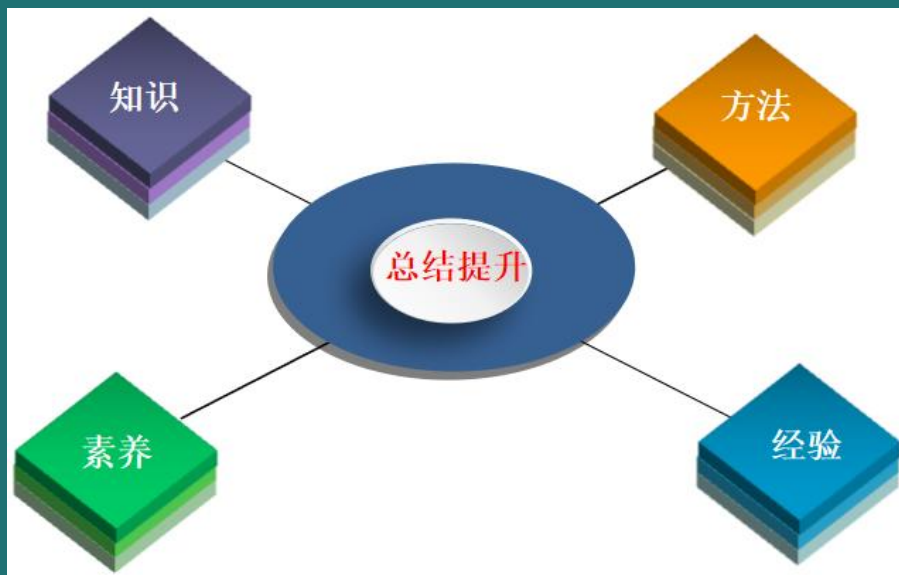
教学目标设置

学生学情分析

教学策略分析

教学过程设计

## 课堂小结 提升素养



## 设计意图

从多个角度总结归纳本堂课的主要内容，不仅重视知识本身，更重视知识间的联系和研究问题的方法；另外，更强调了数学思想方法和数学核心素养在数学学习中的作用。

## 布置作业 课后提升

- 1、必做题：  
课本76页：A组1、2  
                  B组2、3
- 2、选做题：  
课本76页：B组6  
课本77页：习题2-2B11

## 设计意图

体现作业的巩固性和发展性原则，分为必做题和选做题，又充分考虑了学生的差异性。



**敬请指导!**