

LOGO

均值不等式复习课





考纲定位：

- 1.理解并掌握基本不等式及其变形应用；
- 2.会用简单不等式求最值及解决简单的实际应用问题。

重点：利用基本不等式求最值；

难点：利用基本不等式求最值时的变形转化。

一、复习自测：

判断题：

1. $y = \lg x + \frac{16}{\lg x}$ ($x > 0$) 的最小值为8. ()

2. $y = x \cdot (2x^2 - x)$ ($\frac{1}{2} < x \leq 2$) 的最大值是1. ()

解：由均值不等式得：

$$x \cdot (2x^2 - x) \leq \left[\frac{x + (2x^2 - x)}{2} \right]^2 = x^4$$

当且仅当 $x = 2x^2 - x$ 即 $x = 1$ 时等号成立，

所以 $x \cdot (2x^2 - x) \leq x^4 = 1$ ，即函数最大值为1.

3. $y = n + \frac{6}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的最小值是 $2\sqrt{6}$. ()



解 $\because y' = 6x^2 - 2x = 2x(3x - 1)$

\therefore 函数在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ 递增，

\therefore 当 $x=2$ 时，函数取得最大值 12.

二、典型例题：

题型一：一元函数利用均值不等式

例 1：（1）求 $y = x + \frac{4}{x-2}$ ($x < 2$) 的最大值。

变式：求 $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x-2}$ ($x < 2$) 的最大值。

变式提高（体验高考）：

【2014·20】已知点 $A(0, -2)$ ，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， F 是椭圆的焦点。

直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， O 为坐标原点。

(I) 求 E 的方程；(II) 设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程。

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} d |PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2} \quad (k^2 > \frac{3}{4})$$

$$\text{令 } \sqrt{4k^2 - 3} = t (t > 0) \quad S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \leq 1$$

题型二：多元函数利用均值不等式

例 2：已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + 2y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值.

变式 1：已知 $x > -1$, $y > 0$, 且 $x + 2y = 1$, 求 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y}$ 的最小值.

变式 2：已知 $x > -1$, $y > 0$, 且 $x + 2y = 1$, 求 $\frac{x^2}{x+1} + \frac{2y^2 + 2}{y}$ 的最小值.



变式引申：设 $a > b > 0$, 求 $a^2 + \frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值.



错解： $\frac{x^2}{x+1} + \frac{2y^2+2}{y}$

$$= \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{x+1} + 2y + \frac{2}{y}$$

$$= (x+1) + \frac{1}{x+1} + 2y + \frac{2}{y} - 2$$

$$\geq 2 + 4 - 2 = 4$$

当且仅当 $x = 0, y = 1$ 时，等号成立。

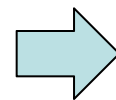
解： $\because a^2 = [b + (a - b)]^2 \geq [2\sqrt{b(a - b)}]^2 = 4b(a - b)$

当且仅当 $b = a - b$ 时，等号成立。

$$\therefore a^2 + \frac{1}{b(a - b)} \geq 4b(a - b) + \frac{1}{b(a - b)} \geq 4$$

当且仅当 $4b(a - b) = \frac{1}{b(a - b)}$ 时，等号成立。

即 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取得最小值 4。

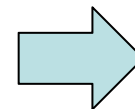


变式提高（体验高考）：

（2013山东高考第12题）

设正数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$,

则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时，求 $x + 2y - z$ 的最大值。



变式提高（体验高考）：

20. (13分) (2015·山东) 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的

离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 以 F_1 为圆心以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.

(?) 求椭圆 C 的方程;

(?) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$. P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E

于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .

(i) 求 $|\frac{OQ}{OP}|$ 的值;

(ii) 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

$$s = 2|m| \frac{\sqrt{16k^2 + 4 - m^2}}{4k^2 + 1} \quad (m^2 \leq 4k^2 + 1)$$



$$s = \sqrt{\frac{m^2(16k^2 + 4 - m^2)}{(4k^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 [4(4k^2 + 1) - m^2]}{(4k^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{(4k^2 + 1)} \left[4 - \frac{m^2}{(4k^2 + 1)} \right]}$$

课堂小结：

一正二定三相等，

均值定理最值成。