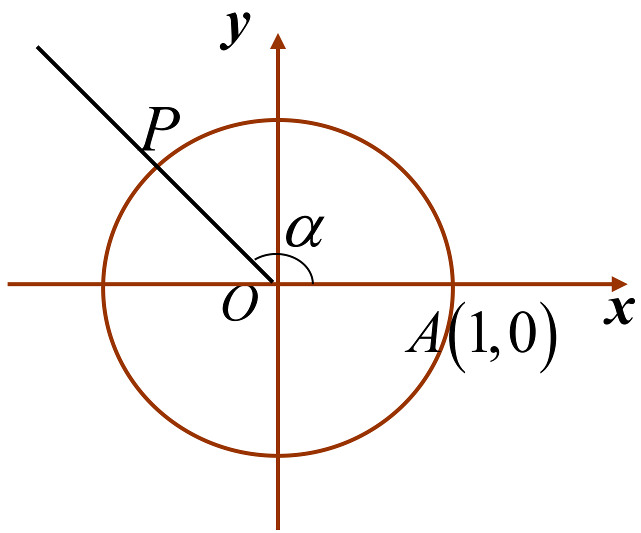
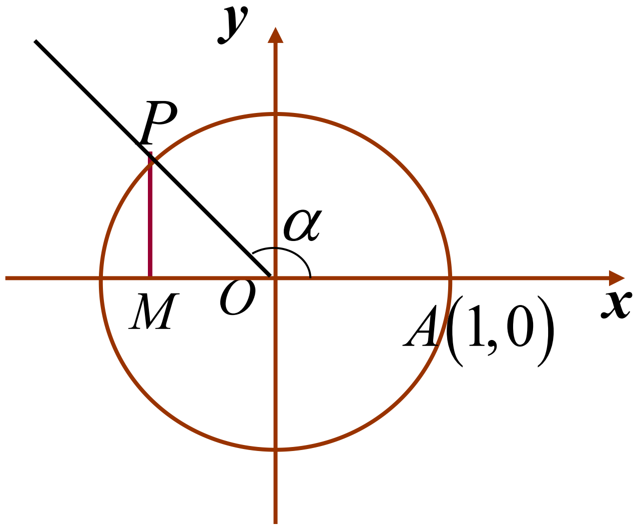
我们知道，终边相同的角的同一三角函数值相等，那么，终边相同的角的不同三角函数值之间有何关系呢？

三角函数是由角的终边与单位圆交点所唯一确定的，所以终边相同的角的三个三角函数值一定有内在联系，由公式一，不妨讨论同角的三个三角函数值间的关系。



5.2.2同角三角函数的基本关系

【思考】设圆O是单位圆，α终边与圆O交于点P，你能否用含α的三角函数值表示点P的坐标？



【思考】无论α取何值，即无论点P在单位圆上处于何位置，OP长度恒为1，你能否用含α的代数式表示这一关系？

结论： 对于任意角$\alpha(\alpha\in R)$，都有 $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

这就是说，**同一个角**α的正弦、余弦的平方和等于1.

【思考】任意角α的$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$这三者有什么样的关系？

$$\sin\alpha = y,\quad \cos\alpha = x,\quad \tan\alpha = \frac{y}{x},(x\neq 0) \longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

【思考】这个商的关系对任意角都成立吗？

当$\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}(k\in Z)$时，有 $\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha}$

这就是说，同一个角α的正弦、余弦的商等于角α的正切.

对同角三角函数的基本关系式的理解

（1）同角三角函数的基本关系式中的角都是“**同一个角**”，而$sin^2\alpha+cos^2\beta=1$不一定成立．“**同角”与角的表示形式无关，**如 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$ 成立，这里的同角是指 $\frac{\alpha}{2}$．一般地，公式中的角可以是**具体值**，也可以是**变量**，可以是**单项式**形式表示的角，也可以是**多项式**形式表示的角.

（2）同角三角函数的基本关系式是**针对使三角函数有意义的角**而言的，$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$对一切$\alpha\in R$恒成立，而 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 仅对 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 成立.

（3）***$sin^2\alpha$与$sin\alpha^2$之间的区别：***前者是$(sin\alpha)^2$的简写，是 **α 的正弦的平方**，读作“$sin\alpha$的平方”，后者是 **α 的平方的正弦**，两者是截然不同的。

同角三角函数的基本关系式的变形

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right) \\ \cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right) \end{cases}$$

知一求二

【例1】已知$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，求$\cos\alpha,\tan\alpha$的值

【变式1】已知 $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$ ， 求$\sin\alpha$、$\tan\alpha$的值.

【变式2】已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$ ， 且α是第二象限角， 求$\sin\alpha$、$\cos\alpha$的值.

【例2】已知$tan\alpha=2$，则

“1”的代换，分子分母同除

(1) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

(2) $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；

(3) $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$.

【例3】化简下列代数式：

化切为弦、因式分解

(1)$\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$；

(2)$\dfrac{\sqrt{1+2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ+\sqrt{1-\cos^2 10^\circ}}$；

(3)$\sin^2\alpha\tan\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

【例4】已知α为第二象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，求

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$,　　(2) $\sin\alpha-\cos\alpha$

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$　　(4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$

(5) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$　　(6) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$

取平方

三角“三剑客”反映三角函数的“和”、“差”、“积”，它们联系的纽带是平方关系.（五星级重要）

【变式1】已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求$\tan\alpha$的值.

【例5】求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

①变更命题法，②左推右或右推左

证明：法一：

$\because (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$

$=1-\sin^2\alpha$

$=\cos^2\alpha$

$=\cos\alpha\cdot\cos\alpha$

$\therefore \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

证明：法二：

$\because$ 左边 $=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$

$=\dfrac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ 右边

【例 6】已知$\dfrac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，求证：$\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.