温故知新

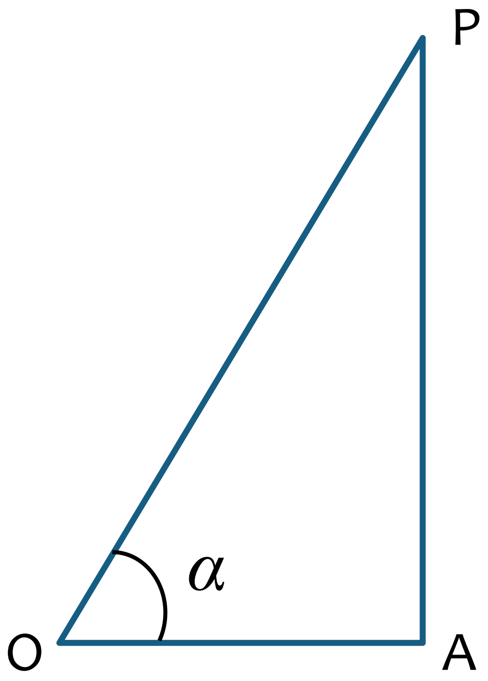
1. 1弧度的角：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角

2. 角度制与弧度制的换算：$180^\circ = \pi$ 弧度　1弧度 $= (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ$

3. 关于扇形的公式：　(1) $l = \alpha R$；　(2) $S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} \alpha R^2$

$\frac{\pi}{3}$　　$\frac{\pi}{6}$　　$\frac{3\pi}{2}$　　$-\frac{\pi}{4}$　　$\frac{3\pi}{4}$　　90°　　120°　　150°

5.2.1 三角函数的概念



sinα=

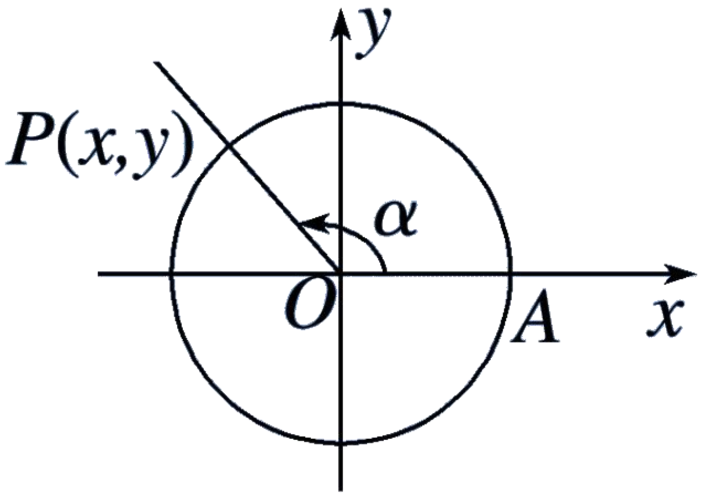
cosα=

tanα=

锐角的三角函数

但由于角已推广至任意角，所以初中的定义已不适用，那该如何定义任意角的三角函数呢？

【探究】给定一个角α，它的终边OP与单位圆的交点P的坐标是唯一确定的吗？



【结论】任意给定一个角$\alpha\in\mathrm{R}$，它的终边OP与单位圆的交点P的坐标，无论是横坐标，还是纵坐标，都是唯一确定的. 所以，点P的横坐标和纵坐标都是角α的函数.

【定义】设α是一个任意角，$\alpha \in R$，它的终边OP与单位圆相交于点$P(x,y)$

（1）把点P的纵坐标 y 叫做α的**正弦函数**，记作sinα，即 $y=\sin\alpha$

（2）把点P的横坐标 x 叫做α的**余弦函数**，记作cosα，即 $x=\cos\alpha$

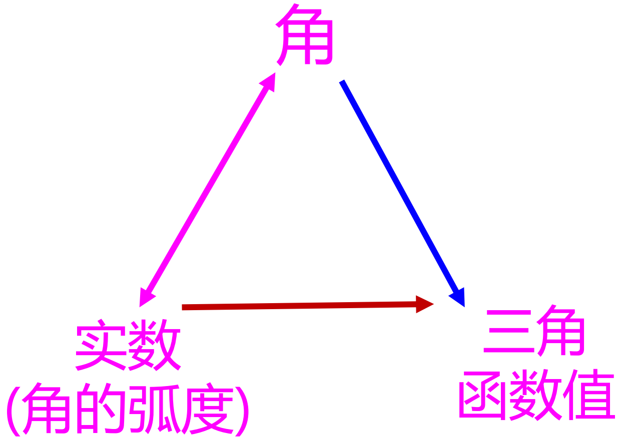
（3）把点P的纵坐标和横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做α的**正切**，记作tanα，即

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha\ (x \neq 0).$$

可以看出，当$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$时，α的终边始终在$y$轴上，这时$x=0$，即此时tan$\alpha$无意义.除此之外，正切tan$\alpha$与实数$\alpha$是一一对应的，所以它们之间也是函数关系，我们称 $\frac{y}{x}=\tan\alpha\ (x \neq 0)$为**正切函数**.

我们把正弦函数、余弦函数和正切函数统称为**三角函数**.

【总结】三角函数可以看成是以实数α(α为弧度)为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数.



（1）正弦函数：　$y=\sin x\,(x\in R)$

（2）余弦函数：　$y=\cos x\,(x\in R)$

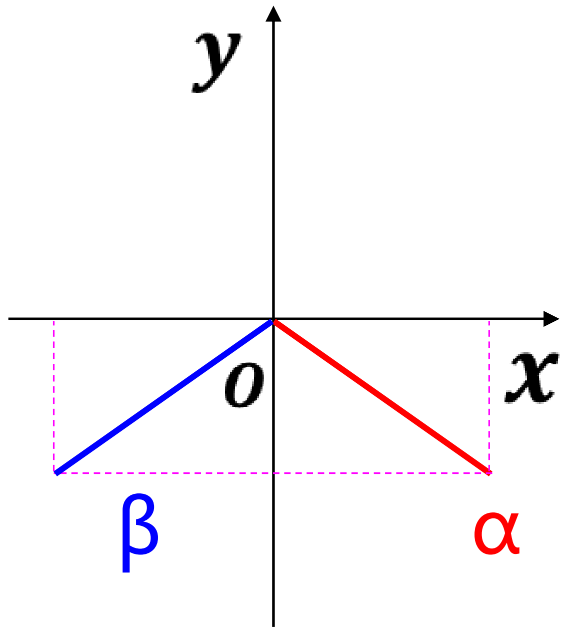
（3）正切函数：　$y=\tan x,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$

【注意】（1）在任意角的三角函数定义中，α是一个使函数有意义的实数

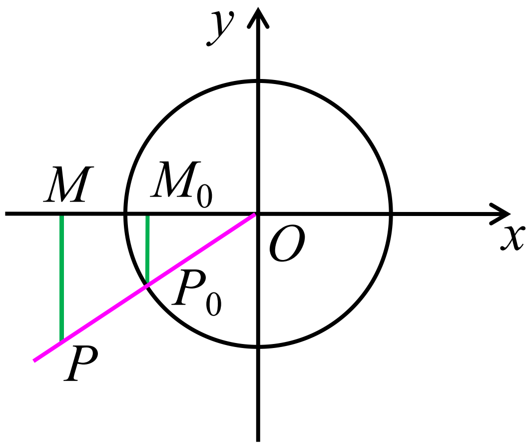
（2）x 是自变量，离开自变量 x 的sin,cos,tan是没有意义的

【例1】求$\frac{5\pi}{3}$的正弦、余弦和正切值.

【练】已知角α、β的顶点在原点，始边在x轴的正半轴上，终边关于y轴对称，若角α的终边上有一点的坐标为（$\frac{4}{5}$，$-\frac{3}{5}$），则tanβ的值是多少？



如图，设α是一个任意角，它的终边上任意一点P（不与原点O重合）的坐标为（x，y），点P与原点的距离为r.



求证：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r},\cos\alpha=\dfrac{x}{r},\tan\alpha=\dfrac{y}{x}.$

三角函数的推广定义

三角函数是比值，是一个实数，这个实数的大小和点P在终边上的位置无关，终边确定了，三角函数就确定了.

【练】已知角α的终边经过点$P(2,-3)$，求α的正弦、余弦和正切值.

【练】已知角α的终边经过点$P(-3m,m)(m\neq 0)$，求α的正弦、余弦和正切值.

【变式】已知角α的终边在直线$3x+4y=0$，求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

常见角的三角函数值

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

牢记常见的三角函数值，做题事半功倍！

诱导公式一： **终边相同的角的对应三角函数相同.**

公式一：

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$$

其中k∈Z

【问题】公式一说明了角和三角函数值的什么关系？给我们什么启发？

【答】公式一说明了角和三角函数值的对应关系是多角对一值的关系：

即给定一个角，它的三角函数值只要存在，就是唯一的；

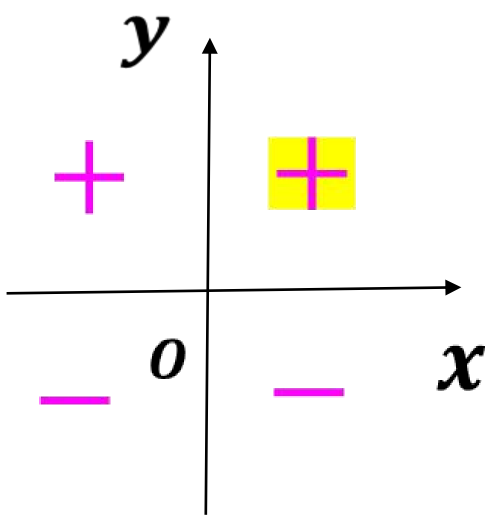
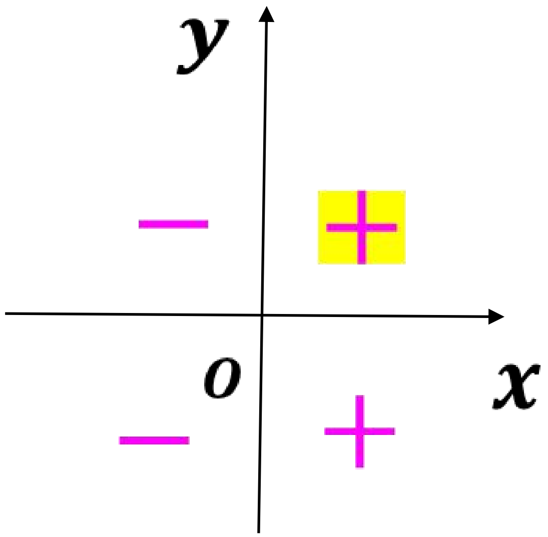
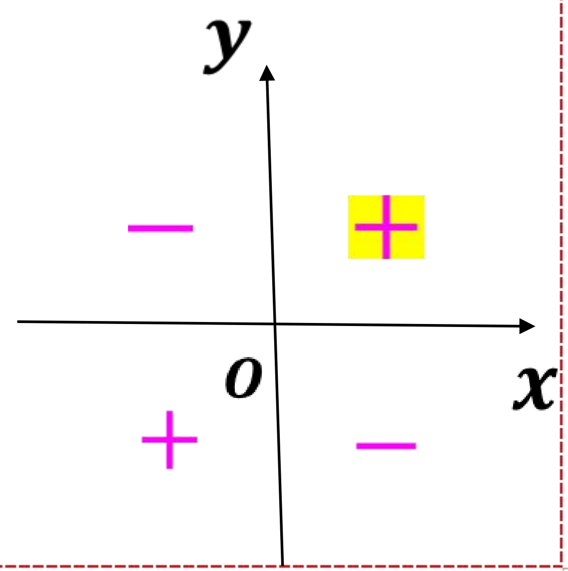
反过来，给定一个三角函数值，却有无数个角与之对因.

【启发】做题时，把角同化为(0~2π)即(0°~360°)终边相同的角，简化计算.

练：填表.

α	2π	$\frac{13}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$\frac{15}{4}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1

三角函数的定义域和函数值的符号

三角函数	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
定义域	R	R	$\{x\|x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi(k \in Z)\}$
值域	[-1,1]	[-1,1]	R
符号			

【例2】点A(cos2023°，sin2023°)在平面直角坐标系中位于(C)

A.第一象限　　　　B.第二象限

C.第三象限　　　　D.第四象限

【练】点P(sinα,cosα)在第二象限，则角α的终边所在的象限为(D)

A.第一象限　　　　B.第二象限

C.第三象限　　　　D.第四象限

【练】选择适当的条件填空

①$\sin\theta > 0$　②$\sin\theta < 0$　③$\cos\theta > 0$

④ $\cos\theta < 0$　⑤$\tan\theta > 0$　⑥$\tan\theta < 0$

(1)角θ为第一象限角的充要条件是 ①③或①⑤或③⑤或①③⑤

(2)角θ为第二象限角的充要条件是 ①④或①⑥或④⑥或①④⑥

(3)角θ为第三象限角的充要条件是 ②④或②⑤或④⑤或②④⑤

(4)角θ为第四象限角的充要条件是 ②③或②⑥或③⑥或②③⑥

【例3】已知$\cos\alpha \geq \frac{1}{2}$,$\sin\alpha \leq \frac{1}{2}$,求$\alpha$的取值范围.

【变式】已知$\cos\alpha \geq \frac{1}{2}$,$\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$,求$\alpha$的取值范围.