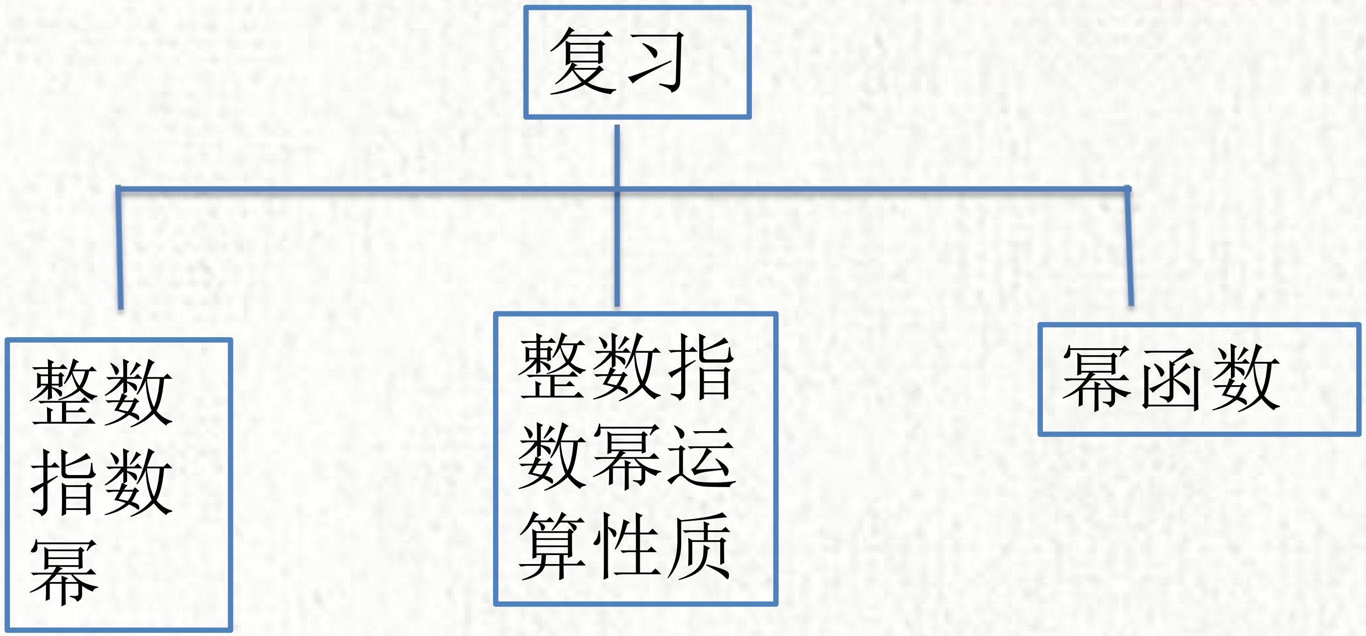
【复习引入】



【复习引入】

整数指数幂

- 正整数指数幂$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n个a}$

例如$(-2)^4 = \underline{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)} = 16, (-2)^5 = \underline{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)} = \underline{-32}$,

- 负整数指数幂 $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}, a \neq 0$

- 0指数数幂$a^0 = 1, a \neq 0$

【复习引入】

整数指数幂的运算性质

若m, n为整数，则有

- 同底数幂乘法：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；
- 幂的乘方：$(a^m)^n = a^{mn}$；
- 积的乘方：$(ab)^m = a^m b^m$.

【复习引入】

幂函数

在学习幂函数时，我们把正方形场地边长c关于面积S 的函数$c=\sqrt{S}$记作$c=S^{\frac{1}{2}}$ $S^{\frac{1}{2}}$，

像 这样**分数为指数的幂**，其意义是什么呢？

4.1 指数

4.1.1 n次方根和分数指数幂

【学习目标】

目标1

- 理解根式的含义，了解指数幂的拓展过程，

目标2

- 掌握指数幂的运算性质，

目标3

- 发展学生数学抽象，数学运算等核心素养。

【探索新知】

1、n次方根：

如果$x^2=a$，那么x叫做a的平方根；比如$(\pm2)^2=4$，那么±2是4的平方根，

如果$x^3=a$，那么x叫做a的平方根；比如$2^3=8$，那么2是8的立方根，

比如$(\pm2)^4=16$，那么±2是16的4次方根

比如$2^5=$ 32，那么2是32的5次方根。

比如$2^n=a$，那么是2是a的n次方根，

比如$x^n=a$，那么是x是a的n次方根

【探索新知】

一般地，如果$x^n = a$，那么x是a的**n次方根**，其中n>1，且$n \in N^*$.

2、根式

- 观察这一组式子，你能得出什么结论？

$$2^3 = 8, (-2)^3 = -8, 2^5 = 32, (-2)^5 = -32$$

解析： 当n是奇数时，正数的n次方根是一个正数，负数的n次方根是一个负数，都记作 $\sqrt[n]{a}$

例如 $\sqrt[3]{8} = \underline{\ 2\ }$，$\sqrt[3]{-8} = \underline{\ -2\ }$，$\sqrt[5]{32} = \underline{\ 2\ }$，$\sqrt[5]{-32} = \underline{\ -2\ }$.

【探索新知】

- 再次观察一组式子，你又能得出什么结论？

$(\pm 2)^2 = 4, (\pm 2)^4 = 16.$

解析： 当n是偶数时，正数的n次方根**有两个**，这两个数互为**相反数**，a的正的n次方根记作$\sqrt[n]{a}$，负的n次方根记作$-\sqrt[n]{a}$，正的n次方根和负的n次方根可以合并写成$\pm\sqrt[n]{a}$

例如$\sqrt{4}=2$，$-\sqrt{4}=-2, \pm\sqrt{4}=\underline{\pm 2}, \sqrt[4]{16}=\underline{\ 2\ }$，$-\sqrt[4]{16}=\underline{-2}, \pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$

- 0的任何次方根**都是0**, 记作$\sqrt[n]{0}$

式子$\sqrt[n]{a}$叫做**根式**，这里n叫做**根指数**，a叫做**被开方数**。根据n次方根的定义，可以知道$(\sqrt[n]{a})^n = a.$

【探索新知】

3、a^n的n次方根

$\sqrt[n]{a^n}$表示a^n的n次方根，$\sqrt[n]{a^n}=a$一定成立吗？如果不一定成立，你能举出一些例子吗？

解析：不一定成立，比如

$\sqrt{2^2}=2,\sqrt{(-2)^2}=2,\sqrt[3]{2^3}=2,\sqrt[3]{(-2)^3}=-2,\sqrt[4]{2^4}=2,\sqrt[4]{(-2)^4}=2,$

$\sqrt[5]{2^5}=2,\sqrt[5]{(-2)^5}=-2,$

归纳1：

当n为奇数时：$\sqrt[n]{a^n}=a$

当n为偶数时：$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, a\geq 0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

【例题巩固】

例1 求下列各式的值：

(1)$\sqrt[3]{(-8)^3}$;　　(2)$\sqrt{(-10)^2}$;

(3)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$;　　(4)$\sqrt{(a-b)^2}$.

解析：(1)$\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$;

(2)$\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$;

(3)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$;

(4)$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases}a-b, a\ge b,\\ b-a, b>a.\end{cases}$

【探索新知】

4、分数指数幂

根据n次方根的定义和数的运算，我们知道

$$\sqrt[5]{a^{10}}=\underline{\sqrt[5]{(a^2)^5}}=a^2=a^{\frac{10}{5}}\ (a>0),$$

$$\sqrt[4]{a^{12}}=\underline{\sqrt[4]{(a^3)^4}}=a^3=\underline{a^{\frac{12}{4}}}\ (a>0),$$

归纳2：这就是说，当根式的被开方数（看成幂的形式）的指数能被根指数整除时，根式可以表示成分数指数幂的形式。

【探索新知】

思考： 当根式的被开方数的指数不能被根指数整除时，根式是否也可以表示为分数指数幂的形式。

例如你希望下列式子成立吗？

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}(a>0),\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}}(b>0),\sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}}(c>0).$$

比如上述3个例子适用$(a^k)^n=a^{kn}$吗？

解析： 适用。

温馨提示

当我们引进一个新的概念和法则时，总希望它与已有的概念和法则相容.

【探索新知】

由此，我们规定，

正数的正分数指数幂:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$.

正数的负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$.

0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义。

【探索新知】

规定了分数指数幂的意义相仿，幂a^x中指数x的取值范围从指数拓展到有理数。

整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用，即对于任何的有理数r, s, 均有下面的性质。

$$(1)a^r \cdot a^s = a^{r+s}(a>0,r,s\in Q);$$

$$(2)(a^r)^s = a^{rs}(a>0,r,s\in Q);$$

$$(3)(ab)^r = a^r b^r(a>0,r\in Q);$$

【例题巩固】

例2 求值

$(1)8^{\frac{2}{3}}$; $(2)(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}$.

解析：$(1)8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$;

$(2)(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}=(\frac{81}{16})^{\frac{3}{4}}=(\frac{3^4}{2^4})^{\frac{3}{4}}=((\frac{3}{2})^4)^{\frac{3}{4}}=(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}$.

归纳3：计算时把根式化成分数指数幂有利于简化运算。

四、课堂小结

学习了本节课，你有什么收获？

- n次方根与分数指数幂
  - n次方根
  - 根式
  - a^n的n次方根
  - 分数指数幂