1.1　集合的概念

情境·思考

课间操

春季出游

商务活动

观察前面的几幅图画:课间操、春季出游、商务活动，思考问题：我们以前有没有学习过与“集合”有关的内容呢?

“集合”是现代数学的基本语言，可以简洁、准确地表达数学内容. 在本章，我们将学习集合的一些基本知识，用集合语言表示有关数学对象，并运用集合和对应的语言进一步描述函数概念.

学习目标

1. 通过实例，理解集合的含义.（数学抽象）
2. 掌握集合中元素的三个特性.（直观想象）
3. 理解元素与集合的“属于”关系.（数学抽象）
4. 记住常用数集及其记法.（直观想象）
5. 掌握集合的两种常用表示方法——列举法和描述法.（数学抽象）

知识点一　元素与集合

1．元素与集合的含义：

	定义	表示
元素	一般地，把<u>研究对象</u>统称为元素	通常用小写拉丁字母a，b，c，…表示集合中的元素
集合	把一些元素组成的<u>总体</u>叫做集合，简称为<u>集</u>	通常用大写拉丁字母A，B，C，…表示集合

2. 集合中元素的特性：__确定性__、互异性和无序性.

3．集合相等：只要构成两个集合的元素是__一样__的，我们就称这两个集合是相等的.

4．集合的分类：

根据集合中元素的个数可以将集合分为__有限集__和__无限集__.

当集合中元素的个数有限时，称之为有限集；

当集合中元素的个数无限时，称之为无限集.

课堂小练

1．判断正误：

(1)立德中学今年入学的爱好数学的学生可以组成一个集合．（ × ）

(2)元素1,2,3和元素3,2,1组成的集合是相等的．（ √ ）

(3)单词“Good”的构成字母组成的集合中有4个元素．（ × ）

2．下列能构成集合的是（ C ）

A．中央电视台著名节目主持人

B．我市跑得快的汽车

C．上海市所有的中学生

D．香港的高楼

3．若以方程$x^2-3x+2=0$和$x^2-5x+6=0$的所有解为元素组成集合A，则A中元素的个数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　C　)

A．1　　　　　　　　B．2

C．3　　　　　　　　D．4

解析： 方程$x^2-3x+2=0$的解为1，2，方程$x^2-5x+6=0$的解为2，3由于两方程有相同的解2,在集合中作为1个元素，故A中有3个元素，故选C　.

知识点二　元素与集合的关系及常用数集

1．元素与集合的关系：

关系	概念	记法
a属于集合A	如果a是集合A的元素，就说a__属于__集合A	$a\in A$
a不属于集合A	如果a不是集合A中的元素，就说a__不属于__集合A	$a\notin A$

2．常用数集及符号表示：

名称	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	N	N^*或N_+	Z	Q	R

[微思考] N与N^*有何区别？

提示： N^*是所有正整数组成的集合，而N是由0和所有的正整数组成的集合，所以N比N^*多一个元素0.

课堂小练

1．给出下列关系：① $\frac{1}{3}\in R$；② $\sqrt{5}\in Q$；③ $-3\notin Z$；④ $-\sqrt{3}\notin N$，其中正确的个数为（ B ）

A．1　B．2　C．3　D．4

2．已知集合 M 有两个元素 3 和 $a+1$，且 $4\in M$，则实数 $a=$ 3 ．

知识点二　集合的表示方法

1．列举法：

把集合的所有元素__一一列举__出来，并用花括号“{}”括起来表示集合的方法叫做__列举法__．

2．描述法：

一般地，设A是一个集合，我们把集合A中所有具有__共同特征__$P(x)$的元素x所组成的集合表示为$\{x\in A|P(x)\}$，这种表示集合的方法称为__描述法__．

例：由大于－1且小于5的所有自然数组成的集合用列举法表示为__$\{0,1,2,3,4\}$__，用描述法表示为__$\{x\in N|-1<x<5\}$__．

探究一 集合的概念

例1. 给出下列各组对象:

①我们班中比较高的同学;　②无限接近于0的数的全体;

③比较小的正整数的全体;　④平面上到点O的距离等于1的点的全体;√

⑤正三角形的全体;√　⑥$\sqrt{2}$的近似值的全体.

其中能够构成集合的有(　B　)

A.1个　B.2个

C.3个　D.4个

分析判断一组对象能否构成集合,就看判断标准是否明确.

答案 B

解析 ①②③⑥不能构成集合,因为没有明确的判断标准;④⑤可以构成集合,“平面上到点O的距离等于1的点”和“正三角形”都有明确的判断标准.

反思感悟 判断一组对象能否组成集合的关键是看该组对象是否具有明确的标准,使得对于任何一个对象,都能按此标准确定它是不是给定集合的元素.应特别注意,含有不确定的模棱两可的对象,如本题中①②③⑥都含有不确定的模棱两可的对象,因此不是数学意义上的集合.另外还要注意集合中元素的互异性、无序性.

变式训练1 下列各组对象不能构成集合的是(　　)

A.某教室内的全部桌子　　B.2020年高考数学难题

C.所有有理数　　D.小于π的正整数

答案 B

解析 “某教室内的全部桌子”属于确定的概念,故能构成集合;由于难题属于不确定的概念,因此“2020年高考数学难题”不能构成集合;由于任意给一个数都能判断是否为有理数,故能构成集合;小于π的正整数分别为1,2,3,能够组成集合.故选B.

探究二 元素与集合的关系

例2. (1)已知不等式$2x-5<0$的解集为M,则以下表示方法正确的是(　　)

A.$0\in M,3\in M$　　B.$0\notin M,3\in M$　　C.$0\in M,3\notin M$ √　　D.$0\notin M,3\notin M$

(2)我们在初中学习过一元二次方程及其解法.设A是方程$x^2-ax-5=0$的解组成的集合.

①0是不是集合A中的元素?　不是

②若$-5\in A$,求实数a的值;　a= -4

③若$1\notin A$,求实数a的取值范围.　a≠ -4

(3)若集合A是由所有形如$3a+\sqrt{2}b(a\in \mathbf{Z},b\in \mathbf{Z})$的数组成的,判断$-6+2\sqrt{2}$是不是集合$A$中的元素.　是；a=-2, b=2

(1)答案 C

解析 不等式 $2x-5<0$ 的解为 $x<\frac{5}{2}$,

由于 $0<\frac{5}{2}$,$3>\frac{5}{2}$,因此 $0\in M$,$3\notin M$,故选 C.

(2)解 ①将$x=0$代入方程,得$0^2-a\times 0-5=-5\neq 0$,

所以0不是集合A中的元素.

②若$-5\in A$,则有$(-5)^2-(-5)a-5=0$,解得$a=-4$.

③若$1\notin A$,则$1^2-a\times 1-5\neq 0$,解得$a\neq -4$.

(3)解 是.因为$-6+2\sqrt{2}=3\times(-2)+\sqrt{2}\times 2$,此时$a=-2\in \mathbf{Z}$,$b=2\in \mathbf{Z}$,所以$-6+2\sqrt{2}$是集合$A$中的元素.

反思感悟　判断元素与集合的关系的两种方法

(1)直接法:如果元素是直接给出的,那么只要判断该元素在已知集合中是否出现即可.此时应明确集合是由哪些元素构成的.

(2)推理法:对于一些元素没有直接给出的集合,只要判断该元素是否满足集合中元素所具有的特征即可.此时应明确已知集合中的元素具有什么特征.若元素a属于集合A,则元素a就具有集合A的特征;若a不属于集合A,则元素a就不具有集合A的特征.

变式训练2

(1)下列所给关系正确的是(　　)

A.$\sqrt{2}\in\mathbf{N}$　　B.$-1\in\mathbf{N}$　　C.$\frac{1}{2}\in\mathbf{N}$　　D.$9\in\mathbf{N}$ √

(2)已知集合A中的元素x满足$x=m^2-n^2(m,n\in\mathbf{Z})$,试判断下列元素与集合$A$之间的关系.

①0; $\in$　　②3; $\in$　　③4; $\in$

④若一个元素$a\in A$,试判断$-a$与集合A的关系,并说明理由. $\in$

(1)答案 D

(2)解 ①∵$0=m^2-m^2(m\in \mathbf{Z})$,∴$0\in A$.

②∵$3=2^2-1^2(2,1\in \mathbf{Z})$,∴$3\in A$.

③∵$4=2^2-0^2$,∴$4\in A$.

④由于$a\in A$,则一定存在$m,n\in \mathbf{Z}$满足$a=m^2-n^2$,

因此$-a=n^2-m^2$,结合$m,n\in \mathbf{Z}$可知$-a\in A$.

探究三 集合中元素的特性及其应用

例3. 已知集合A含有3个元素 $a-2$, $2a^2+5a$, 12, 且$-3\in A$,求a的值.

分析 由$-3\in A$,分两种情况进行讨论,注意根据集合中元素的互异性进行检验.

解 因为$-3\in A$,所以 $a-2=-3$ 或 $2a^2+5a=-3$,解得 $a=-1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$. 当 $a=-1$ 时,$a-2=-3$,$2a^2+5a=-3$,集合 A 不满足元素的互异性,所以舍去 $a=-1$. 当 $a=-\frac{3}{2}$时,经检验,符合题意.故 $a=-\frac{3}{2}$.

反思感悟 涉及含字母的集合中元素与集合的关系问题时,在根据题意求得其中元素(或字母)的值以后,要注意检验所求字母的值是否满足集合中元素的性质,尤其是是否满足集合中元素的互异性.

延伸探究

(1)本例中集合A中含有三个元素,实数a的取值是否有限制?

(2)本例中集合A中能否只有一个元素呢?

解 (1)有限制.

由元素的互异性可得$\begin{cases} a-2 \neq 12, \\ 2a^2+5a \neq 12, \\ a-2 \neq 2a^2+5a. \end{cases}$解 $a-2\neq12$,得 $a\neq14$;解 $2a^2+5a\neq12$,即

$(2a-3)(a+4)\neq0$,得 $a\neq\frac{3}{2}$且 $a\neq-4$;解 $2a^2+5a\neq a-2$,即 $a^2+2a+1\neq0$,得 $a\neq-1$.

所以实数 a 不能取四个值:$14,\frac{3}{2},-4,-1$.

(2)若该集合中只有一个元素,则有$a-2=2a^2+5a=12$.

由$a-2=12$,解得$a=14$,此时$2a^2+5a=2\times14^2+5\times14=462\neq12$.所以该集合中不可能只含有一个元素.

素养形成

利用分类讨论思想求解一类关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的解集

一般地,形如$ax^2+bx+c=0$是关于x的方程,当$a\neq0$时,该方程是关于x的一元二次方程,当$a=0,b\neq0$时是关于x的一元一次方程,求解此类方程的解集问题,要注意根据二次项的系数是否为0判断其是否为一元二次方程,当$a\neq0$时可借助判别式的符号求解.

素养形成

典例 已知集合A是由方程$ax^2+2x+1=0(a\in\mathbf{R})$的实数解作为元素构成的集合.

(1)1是A中的一个元素,求集合A中的其他元素;

(2)若A中有且仅有一个元素,求a的值组成的集合B中元素的个数;

(3)若A中至多有一个元素,试求a的值.

【规范答题】

解 (1)若1是A中的一个元素,则只需$a+2+1=0$,

解得$a=-3$,

此时由$-3x^2+2x+1=0$可知$x=1$或$-\frac{1}{3}$.

则集合A中的另一个元素为$-\frac{1}{3}$.

(2)当$a=0$时,原方程化为$2x+1=0$,解得$x=-\frac{1}{2}$,满足条件;

当$a\neq0$时,只需$\Delta=4-4a=0$,即$a=1$,

故所求a的值为0或1,

因此集合B中元素的个数为2.

(3)A中至多有一个元素时包括方程有1个解或无解.

当方程中有1个解时,由(2)可知a的值为0或1;

当方程无解时,只需$\Delta=4-4a<0$,即$a>1$.

因此A中至多有一个元素时,$a=0$或$a\geqslant1$.

当堂检测

1.已知集合 A 中的元素 x 满足 $x\leqslant 2\sqrt{3}$,$x\in\mathbf{R}$,$a=\sqrt{14}$,$b=2\sqrt{2}$,则(　　)

A.$a\in A$,且$b\notin A$　　B.$a\notin A$,且$b\in A$　　C.$a\in A$,且$b\in A$　　D.$a\notin A$,且$b\notin A$

答案 B

2.(**多选题**)下列说法正确的是(　　)

A.花坛上色彩艳丽的花朵构成一个集合

B.正方体的全体构成一个集合

C.未来世界的高科技产品构成一个集合

D.不大于3的所有自然数构成一个集合

答案 BD

3.若以正实数x,y,z,w四个元素构成集合A,以A中四个元素为边长构成的四边形可能是(　　)

A.梯形　　B.平行四边形　　C.菱形　　D.矩形

答案　A

4.用符号∈或∉填空:(其中A表示由所有质数组成的集合)

(1)1______A,2______A,3______A;

(2)$\frac{3}{2}$______$\mathbf{Z}$,$\frac{\sqrt{3}}{3}$______$\mathbf{R}$,$\sqrt{9}$______$\mathbf{N}$.

答案　(1)∉　∈　∈　(2)∉　∈　∈

5.若方程x^2-ax+2=0的解集为M,且$1\in M$,则a=__________,集合M中的另一个元素是__________.

答案 3　2

6.已知集合M中含有3个元素0,x^2,-x,求实数x满足的条件.

解 根据集合中元素的互异性知$\begin{cases}x^2\neq 0,\\ -x\neq 0,\\ x^2\neq -x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -1.\end{cases}$

故实数x满足的条件为$x\neq 0$,且$x\neq -1$.

6.已知集合M中含有3个元素$0,x^2,-x$,求实数x满足的条件.

解 根据集合中元素的互异性知$\begin{cases}x^2 \neq 0,\\ -x \neq 0,\\ x^2 \neq -x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x \neq 0,\\ x \neq -1.\end{cases}$

故实数 x 满足的条件为 $x\neq0$,且 $x\neq-1$.

课后小结

1.知识清单：

(1)元素与集合的概念、元素与集合的关系.

(2)常用数集的表示.

(3)集合中元素的特性及应用.

(4)描述法表示集合的理解.

(5)用列举法和描述法表示集合.

(6)两种表示法的综合应用.

2.方法归纳：分类讨论；等价转换.

3.常见误区：忽视集合中元素的互异性；点集与数集的区别.

本　课　结　束