圆锥曲线中极点极线调和点列问题

2021级高三数学组　　马金玲

影响。高考的人才选拔要求必须与新时代高等教育人才培养方向相一致、与培养要求相契合，高考考试科目的设置、考试内容的选取也必须与高等教育对于大学新生知识结构的要求相契合。因此，高考必须始终准确把握党和国家事业发展对高等教育人才选拔的要求，充分适应新形势下经济社会发

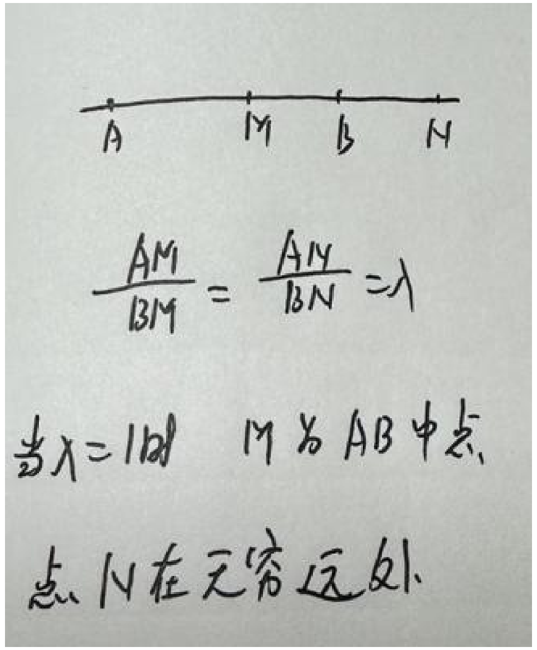
2. 推动基础教育改革，促进学生全面发展

当前，部分高中教学中还存在着“满堂灌”、机械重复训练、实验教学和实践教育不足、忽视高阶能力发展等问

“极点极线”是射影几何中的内容，不属于高考考查的范围，但极点极线是圆锥曲线的一种基本特征，自然成为命题人命题的背景知识和方向，可以肯定的说“极点极线”为背景的考题是出题人思维中的定势方向，学生掌握了极点极线的相关知识，就可以从“高观点下”看待高中圆锥曲线的相关内容，更容易抓住问题的本质，虽然高考解答题不能用相关结论，但是我们可以将它作为辅助手段，快速的找到正确答案，然后再用初等方法写过程解题。也就是说只有熟练“二级结论”才能明确运算方向、提高运算效率

调和点列

如图，在直线l上有两基点A,B，则在l上存在两点M,N到A,B两点的距离比值为定值，即$\frac{AM}{BM}=\frac{AN}{BN}=\lambda$，则称顺序点列$A,M,B,N$四点构成调和点列（易得调和关系$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$）。同理，也可以$M,N$为基点，则顺序点列$A,M,B,N$四点仍构成调和点列。所以称$A,B$和$M,N$称为调和共轭。



定比点差法

在椭圆或双曲线$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中，设$A,B$为椭圆或双曲线上的两点．若存在$M,N$调和分割$A,B$，即满足$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=-\lambda\overrightarrow{NB}$，则一定有$\frac{x_Mx_N}{a^2}\pm\frac{y_My_N}{b^2}=1$．

证明：由已知点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在椭圆或双曲线

$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上，设$M(x_M,y_M),N(x_N,y_N)$．

首先$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，则由定比分点坐标公式可得$\begin{cases}x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\end{cases}$

又$\overrightarrow{AN}=-\lambda\overrightarrow{NB}$，则由定比分点坐标公式可得$\begin{cases}x_N=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\\ y_N=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda},\end{cases}$

当$\lambda\neq\pm1$时，将$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$代入曲线，有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}=1①\\ \frac{x_2^2}{a^2}\pm\frac{y_2^2}{b^2}=1②\end{cases}$，

②$\times\lambda^2$得到$\frac{\lambda^2x_2^2}{a^2}\pm\frac{\lambda^2y_2^2}{b^2}=\lambda^2$③　　　③和①作差整理可得：

$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{a^2(1+\lambda)(1-\lambda)}\pm\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{b^2(1+\lambda)(1-\lambda)}=1$，将前式代入整理得$\frac{x_Mx_N}{a^2}\pm\frac{y_My_N}{b^2}=1$．

在抛物线$y^2=2px$中，设A,B为抛物线上的两点．若存在M,N调和分割A,B，即满足$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=-\lambda\overrightarrow{NB}$，则一定有$y_Py_Q=p(x_P+x_Q)$．

证明：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，得$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$，

由$\overrightarrow{AN}=-\lambda\overrightarrow{NB}$，得$N\left(\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\right)$，

又$\begin{cases}y_1^2=2px_1①\\ \lambda^2y_2^2=2\lambda^2px_2②\end{cases}$，①—②得：$y_1^2-\lambda^2y_2^2=p(x_1+x_1-\lambda^2x_2-\lambda^2x_2)$，

即$(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)=p(x_1+\lambda x_2+x_1-\lambda x_2+\lambda x_1-\lambda^2x_2-\lambda x_1-\lambda^2x_2)$，

$\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{(1+\lambda)(1-\lambda)}=\frac{p(x_1+\lambda x_2)(1-\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)}+\frac{p(x_1-\lambda x_2)(1+\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)}$，$\therefore y_Py_Q=p(x_P+x_Q)$．

极点极线

1.2 代数定义

已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则称点 $P(x_0,y_0)$ 和直

$l: Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 是圆锥曲线 Γ の一对极点和极线.

事实上，在圆锥曲线方程中，以 x_0x 替换 x^2，以 $\dfrac{x_0+x}{2}$ 替换 x（另一变量 y 也是如

即可得到点 $P(x_0,y_0)$ 极线方程.

特别地：

(1)对于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

(2)对于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；

(3)对于抛物线 $y^2=2px$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$.

以椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为例，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线 l：$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 具有下列常见结论，在其他圆锥曲线中也有类似的结论，完全可以类比迁移.

结论 1　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上时，极线 l 为椭圆在点 P 处的切线.

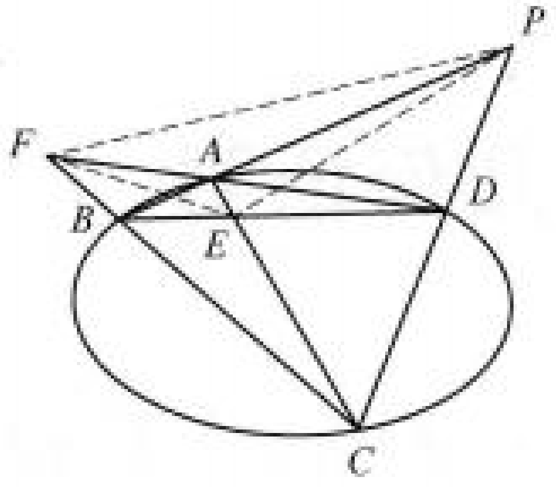
结论 2　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外时，过点 P 作椭圆的两条切线，切点为 A、B，则直线 AB 就是点 P 所对应的极线 l：$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.

结论 3　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内部时，过点 P 作直线 m 与椭圆交于 A、B 两点，则椭圆在 A、B 处的切线的交点在极线 l：$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 上.

极点极线

6　极点极线的几何定义

过椭圆外一点 P 作椭圆的两条割线，分别交椭圆于点 A、B、C、D，连接 AC、BD 交于点 E，连接 DA、CB 交于点 F，则称直线 EF 为点 P 对应的极线. 同理可知直线 EP 为点 F 对应的极线，直线 PF 为点 E 对应的极线. 所以我们把三角形 PEF 叫做“自极三角形”（见图 1）. 有了“自极三角形”，用它来为圆锥曲线中的定点问题“探路”，便可以居高临下进行解题.



极点极线的配极原理

①点 P 关于二次曲线 φ 的极线 p 经过点 $E \Leftrightarrow$ 点 E 关于二次曲线 φ 的极线 q 经过点 P.

②直线 p 关于二次曲线 φ 的极点 P 在直线 q 上 $\Leftrightarrow$ 直线 q 关于二次曲线 φ 的极点 E 在直线 p 上.

就是点 P 和点 E 是二次曲线的一组调和共轭点.

特殊的极点极线

§3. 极点与极线在教材中の体现

极点与极线反映の是圆锥曲线の基本几何性质，所以在解析几何教材中必然有所体现.

3.1 圆锥曲线の焦点与准线是一对特殊の极点与极线

如果圆锥曲线是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变为 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是椭圆の准线；如果圆锥曲线是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变为 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是双曲线の准线；如果圆锥曲线是抛物线 $y^2=2px$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 时，极线 $y_0y=p(x_0+x)$ 变为 $x=-\frac{p}{2}$，恰是抛物线の准线.

结论 4　过准线上的一点 P 作抛物线的两条切线，切点为 A、B，则直线 AB 经过焦点.

结论 5　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，若直线 AB 经过焦点 F，则点 P 在抛物线的准线上.

结论 6　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，直线 AB 经过焦点 F，则 $PF\perp AB$.

以上三个结论完全可以迁移到椭圆和双曲线中去，证明留给读者，此处不再赘述. 值得注意的是下面这个结论则是抛物线独有的，应该单独理解记忆.

结论 7　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，直线 AB 经过焦点 F，则 $PA\perp PB$.

例 4　（2018 年高考全国 3 卷理科第 16 题）已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C：$y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A、B 两点. 若 $\angle AMB=90°$，则 $k=$________.

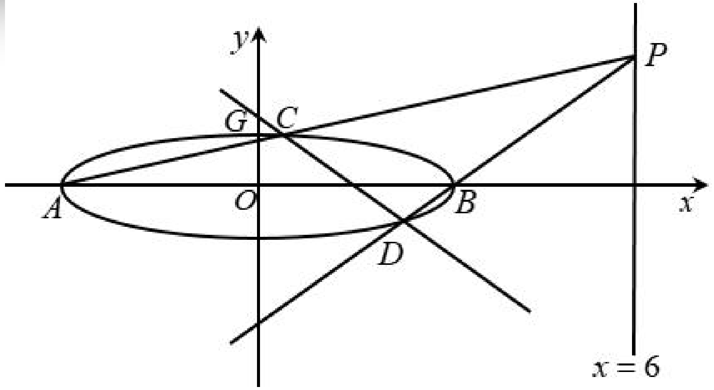
解析：发现 $M(-1,1)$ 在抛物线的准线上，所以由结论 4 可知，点 M 所对应的极线 $y=2(x-1)$ 经过抛物线的焦点，再借助结论 7，结合题意可知，直线 AB 的方程就是 $y=2(x-1)$，所以 $k=2$.

2020年全国I卷理科数学第20题

已知 A,B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$ 为直线上 $x=6$ 的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D .

（1）求 E 的方程;

（2）证明：直线 CD 过定点.



法一：联立

联立直线AP 的方程与椭圆方程可得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\dfrac{t}{9}(x+3)\end{cases}\Rightarrow (t^2+9)x^2+6t^2x+9t^2-81=0$$

$$\therefore C\left(\frac{-3t^2+27}{t^2+9},\frac{6t}{t^2+9}\right)\qquad \text{同理}D\left(\frac{3t^2-3}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1}\right)$$

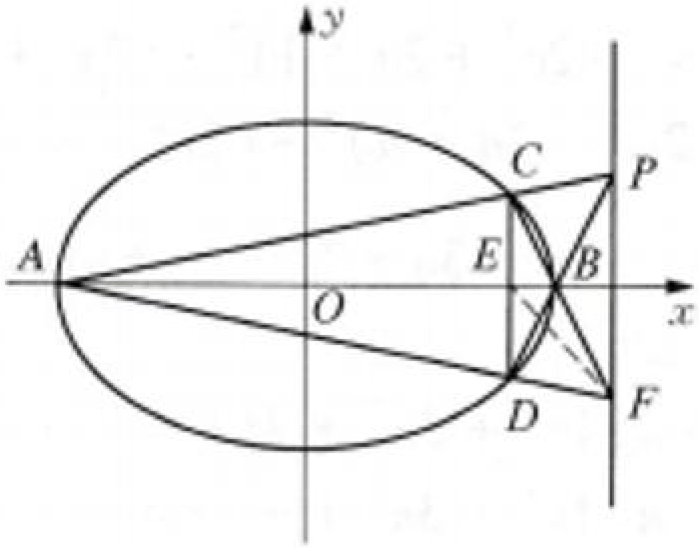
当$x_C \neq x_D$即$t^2\neq 3$， CD 方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$y-\left(\frac{-2t}{t^2+1}\right)=\frac{\dfrac{6t}{t^2+9}-\left(\dfrac{-2t}{t^2+1}\right)}{\dfrac{-3t^2+27}{t^2+9}-\dfrac{3t^2-3}{t^2+1}}\left(x-\frac{3t^2-3}{t^2+1}\right)$$

化简得$y=\dfrac{4t}{3(3-t^2)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$　故直线 CD 过定点$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

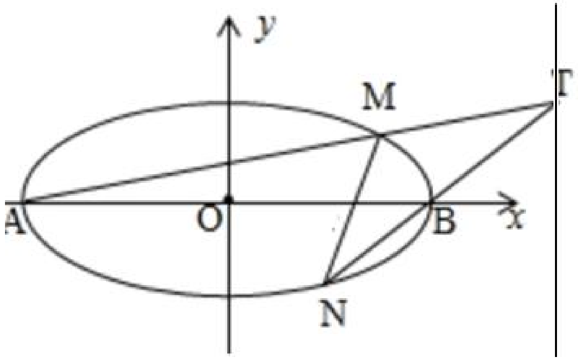
当$x_C=x_D$即$t^2=3$也符合

故直线 CD 过定点$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$



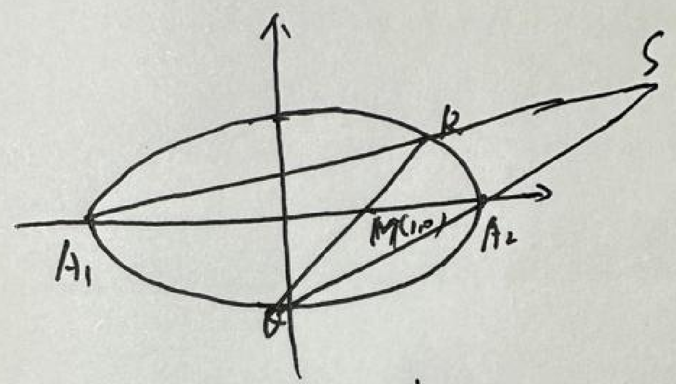
解析：连结 AB、CD 交于点 E，设 AD、CB 交于点 F，由极点极线的几何定义可知，直线 EF 为点 P 对应的极线（见图 2）．设 $P(6,y_0)$，则 P 所对应的极线方程为 EF：$\dfrac{6x}{9}+yy_0=1$，显然 EF 过定点 $E\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，从而 CD 也经过定点 $E\left(\dfrac{3}{2},0\right)$．

推广: 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右顶点分别为$A,B$点$T$为直线$x=q(q\neq 0)$上一动点，直线$TA$、$TB$与椭圆分别交于点$M,N$，则直线$MN$必过定点$\left(\frac{a^2}{q},0\right)$



推广：已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右顶点分别为$A,B$点$T$为直线$x=q(q\neq 0)$上一动点，直线$TA$、$TB$与双曲线分别交于点$M,N$，则直线$MN$必过定点$\left(\frac{a^2}{q},0\right)$

例 3 （大本 211 页）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．若 $A_1(-2，0)$，$A_2(2，0)$，$M(1，0)$．设直线 l 过点 M，且与轨迹 E 交于 R，Q 两点，直线 A_1R 与 A_2Q 交于点 S，试问当直线 l 变化时，点 S 是否在一条定直线上？



点M(1,0) 极线 $\frac{1\times x}{4}+0\times y=1$

即 $x=4$ 过点S.

∴点S 就在直线 $x=4$ 上.

解 设直线 l：$x=my+1$，若 $m=0$，

联立方程组 $\begin{cases}x^2+4y^2=4，\\ x=my+1，\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

设 $R(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则有 $y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$，

从此不难发现 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

因为直线 A_1R：$y=\frac{y_1}{my_1+3}(x+2)$，

与直线 A_2Q：$y=\frac{y_2}{my_2-1}(x-2)$ 交于点 S，

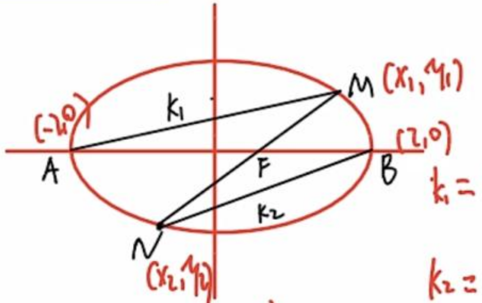
所以得点 S 的横坐标 $\frac{y_1}{my_1+3}(x+2)=\frac{y_2}{my_2-1}(x-2)$，

$$x=\frac{4my_1y_2+6y_2-2y_1}{y_1+3y_2}=\frac{6（y_1+y_2）+6y_2-2y_1}{y_1+3y_2}=\frac{4（y_1+3y_2）}{y_1+3y_2}=4，$$

故点 S 在定直线 $x=4$ 上．

已知点 F 为椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，A，B 分别为其左、右顶点，过 F 作直线 l 与椭圆交于 M，N 两点（不与 A，B 重合），记直线 AM 与 BN 的斜率分别为 k_1,k_2，证明 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

法 1：和积转换



y_1y_2 $\quad \frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}$

$|y_1-y_2|$ $\quad y_1^2+y_2^2$

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=ty+1\end{cases}$，$(4+3t^2)y^2+6ty-9=0$，$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6t}{4+3t^2} & ✓ \quad -\frac{b}{a}\\ y_1y_2=-\frac{9}{4+3t^2} & ✓ \quad \frac{c}{a}\end{cases}$

$k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$ $\qquad \begin{cases}x_1=ty_1+1\\ x_2=ty_2+1\end{cases}$

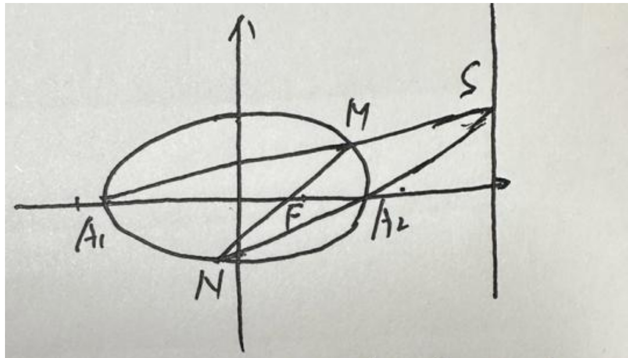
$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$

$\boxed{\frac{\mu A+\lambda B}{mA+nB}}\Rightarrow\frac{\mu}{m}=\frac{\lambda}{n}$

$\frac{2}{3}ty_1y_2=-\frac{9t}{4+3t^2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{6t}{4+3t^2}=y_1+y_2$

$\frac{2}{3}ty_1y_2=y_1+y_2\Rightarrow ty_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$

$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(ty_2-1)}{y_2(ty_1+3)}=\frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$



点 $F(1,0)$ 极线 $\frac{x}{4}=1$

设 $S(4,t)$

$\therefore \frac{k_{A_1S}}{k_{A_2S}}=\frac{\frac{t}{4+2}}{\frac{t}{4-2}}=\frac{1}{3}$

例 1 （2017 年高中数学联赛广东初赛第 9 题改编）直线 $l: y=x+b$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 不相交，过直线 l 上一动点 P 作椭圆的两条切线，切点为 M、N，求证：MN 过定点.

解析：设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则切线 $PM: \frac{xx_1}{25}+\frac{yy_1}{9}=1$，$PN: \frac{xx_2}{25}+\frac{yy_2}{9}=1$，把 $P(x_0, y_0)$ 分别代入得 $\frac{x_0x_1}{25}+\frac{y_0y_1}{9}=1$，$\frac{x_0x_2}{25}+\frac{y_0y_2}{9}=1$，说明直线 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ 同时经过 M、N 两点，所以直线 MN 的方程为 $\frac{xx_0}{25}+\frac{y(x_0+b)}{9}=1$，即 $\left(\frac{x}{25}+\frac{y}{9}\right)x_0+\frac{yb}{9}=1$，令 $\frac{x}{25}+\frac{y}{9}=0$ 可得 $y=\frac{9}{b}$，$x=-\frac{25}{b}$，所以 MN 过定点 $\left(-\frac{25}{b}, \frac{9}{b}\right)$，与动点 P 无关.

评注：设点 $P(x_0, x_0+b)$，则点 P 对应的极线 $\frac{xx_0}{25}+\frac{y(x_0+b)}{9}=1$ 就是直线 MN.

即 MN: $\left(\frac{x}{25}+\frac{y}{9}\right)x_0+\frac{yb}{9}=1$，由此可知 MN 过定点 $\left(-\frac{25}{b}, \frac{9}{b}\right)$. 在高考答题过程中使用这些超纲结论是要扣分的，所以我们只需用极点极线来“探路”，再用“通性通法”写过程即可，如本题的解析. 限于篇幅，后文只分析思路，不再展示详细过程. 如果是选择题或者填空题，则使用极点极线的结论可以直接做出解答.

例题 4 (2012 年高考北京卷理科) 已知曲线 C : $(5-m)x^2+(m-2)y^2=8\,(m\in\mathbb{R})$.

(I) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;

(II) 设 $m=4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A,B (点 A 位于点 B 的上方), 直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M、N, 直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G.求证: A,G,N 三点共线.

背景分析 (II) 如图 26, 直线 AN 与 BM 的交点必在点 $P(0,4)$ 的极线上, 而点 $P(0,4)$ 的极线为 $y=1$. 所以直线 AN、直线 BM、直线 $y=1$ 共点, 所以 A,G,N 三点共线.

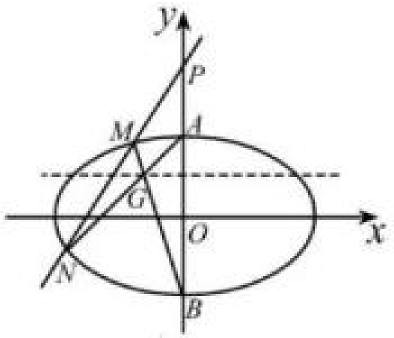
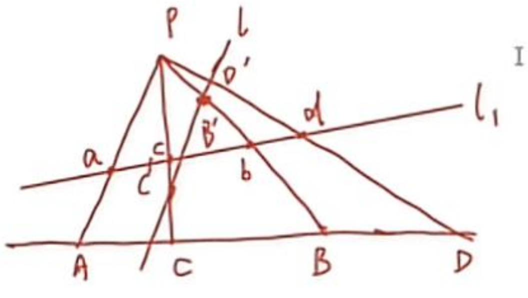


图 26

调和点列与线束

A、C、B、D成调和点列 $\Rightarrow \frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$

性质1

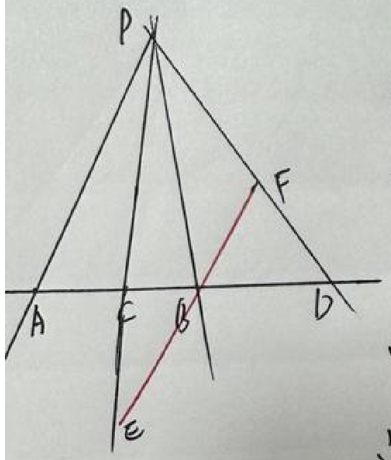


(a, c, b, d) 成调和点列.

PA, PC, PB, PD 调和点束.

$l \parallel PA \Leftrightarrow C'B' = B'D'$

性质2



A B 调和分割 CD

作 EF ∥ PA

∵ △PAC ∽ △BCE ∴ $\frac{PA}{BE}=\frac{AC}{CB}$

△PAD ∽ △BDF ∴ $\frac{PA}{BF}=\frac{AD}{BD}$

∵ C、D 调和分割 A、B

∴ $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$ ∴ $\frac{PA}{BE}=\frac{PA}{BF}$

∴ BE = BF

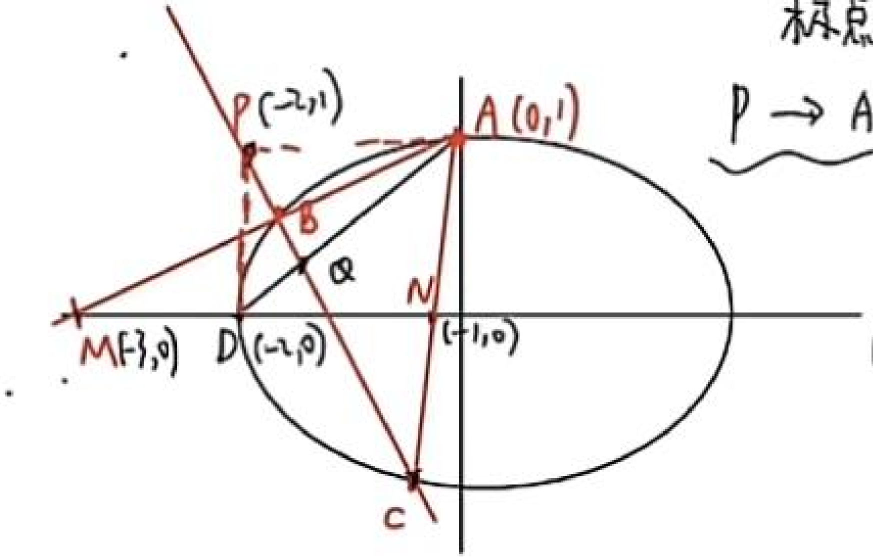
调和点列与线束

(2022 高考北京卷 · 第 19 题) 已知椭圆：$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程； $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

$MN=2.$



极点极线 → 调和点列 → 调和线束 → { //: 性质1: 长度 ; 截线束: 性质2: 调… 点…

$P \to AD$　　(P,B,Q,C)　　(AP,AB,AQ,AC)

x轴 // AP ⇒ 则 $MD=DN=1$

$l_{AN}: y-1=x$

$\begin{cases} y-1=x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases} \Rightarrow x^2+4(x+1)^2-4=0$

$5x^2+8x=0 \quad x=-\frac{8}{5} \quad y=-\frac{3}{5}$

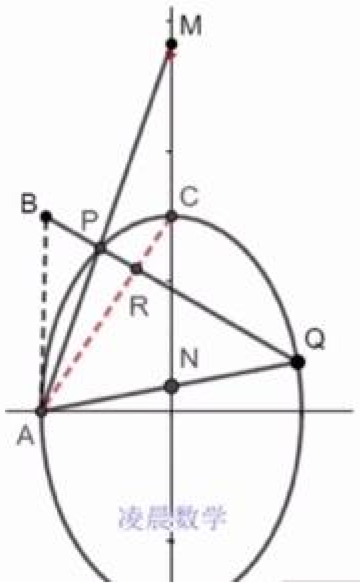
$C(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}) \quad k=\frac{-\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}=-4.$

调和点列与线束

例1（2023年全国乙卷T20）已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A(-2,0)$ 在 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $(-2,3)$ 的直线交 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 与 y 轴的交点分别为 M,N，证明：线段 MN 的中点为定点.（公众号：凌晨讲数学）



$B(-2,3)$. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$

$\Rightarrow$ 过 $(-2,0)\cdot(0,3) \Rightarrow$ 直线 AC

B,R,P,Q 调和点列

$A(B,R,P,Q)$ 为调和线束

证明：（2）要使过点 $(-2,3)$ 的直线交 C 于点 P，Q 两点，则 PQ 的斜率存在且小于 0，

设 $PQ: y-3=k(x+2)$，即 $y=kx+2k+3$，$k<0$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2k+3 \\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(4k^2+9)x^2+8k(2k+3)x+16k(k+3)=0$.

$\Delta=[8k(2k+3)]^2-4(4k^2+9)\cdot16k(k+3)=-1728k>0$.

$x_1+x_2=\frac{-8k(2k+3)}{4k^2+9}$，$x_1x_2=\frac{16k(k+3)}{4k^2+9}$，

直线 $AP: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，取 $x=0$，得 $M(0,\frac{2y_1}{x_1+2})$；直线 $AQ: y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，取 $x=0$，得 $N(0,\frac{2y_2}{x_2+2})$.

$$\therefore \frac{2y_1}{x_1+2}+\frac{2y_2}{x_2+2}=\frac{2y_1(x_2+2)+2y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=2\frac{(kx_1+2k+3)(x_2+2)+(kx_2+2k+3)(x_1+2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$$

$$=2\frac{2kx_1x_2+(4k+3)(x_1+x_2)+4(2k+3)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=2\frac{2k\cdot\frac{16k(k+3)}{4k^2+9}+(4k+3)\cdot\frac{-8k(2k+3)}{4k^2+9}+4(2k+3)}{\frac{16k(k+3)}{4k^2+9}+2\cdot\frac{-8k(2k+3)}{4k^2+9}+4}$$

$$=2\frac{32k^3+96k^2-64k^3-96k^2-48k^2-72k+32k^3+72k+48k^2+108}{16k^2+48k-32k^2-48k+16k^2+36}=2\times\frac{108}{36}=6.$$

$\therefore MN$ 的中点为 $(0,3)$，为定点.

调和点列与线束

（2022·全国·乙）已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点．

小本400页第四题

(1)求 E 的方程；

(2)设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点．

(2)：证明（续 5）.

$\because \overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$。

$\therefore (x_T-x_1,y_T-y_1)=(x_H-x_T,y_H-y_T)$，

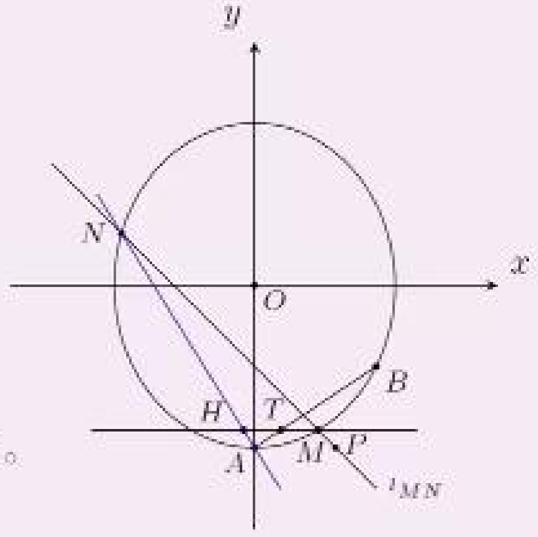
$(x_H,y_H)=(2x_T-x_1,2y_T-y_1)$，

$H(3y_1+6-x_1,y_1)$。

$\therefore l_{HN}: y-y_2=\dfrac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

即 $y=\dfrac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}x+y_2-\dfrac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}x_2$。

令 $x=0$，得：



当过点 P 的直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y+2=k(x-1)$，点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases} y+2=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$

消去 y，得 $(4+3k^2)x^2-6k(k+2)x+3k(k+4)=0$，

则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\dfrac{6k(k+2)}{4+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k(k+4)}{4+3k^2}$．

将 $y=y_1$ 代入 $y=\dfrac{2}{3}x-2$，得 $x=\dfrac{3}{2}(y_1+2)$，

则点 $T\left(\dfrac{3}{2}(y_1+2),y_1\right)$．

又 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，所以点 $H(3y_1+6-x_1,y_1)$．

所以直线 HN 的方程为 $(3y_1+6-x_1-x_2)(y-y_2)=(y_1-y_2)(x-x_2)$，

即 $(3y_1+6-x_1-x_2)(y-y_2)-(y_1-y_2)(x-x_2)=0$，

将 $x=0$，$y=-2$ 代入上式，整理得 $12-2(x_1+x_2)+3y_1y_2+6(y_1+y_2)-x_1y_2-x_2y_1=0$．(*)

因为 $x_1+x_2=\dfrac{6k(k+2)}{4+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k(k+4)}{4+3k^2}$，

所以 $y_1+y_2=k(x_1-1)-2+k(x_2-1)-2=\dfrac{-8k-16}{4+3k^2}$，

$x_1y_2+x_2y_1=x_1[k(x_2-1)-2]+x_2[k(x_1-1)-2]=\dfrac{-24k}{4+3k^2}$，

$y_1y_2=[k(x_1-1)-2][k(x_2-1)-2]=\dfrac{-8k^2+16k+16}{4+3k^2}$，

所以(*)式左边 $=12-\dfrac{12k(k+2)}{4+3k^2}+\dfrac{-24k^2+48k+48}{4+3k^2}+\dfrac{-48k-96}{4+3k^2}-\dfrac{-24k}{4+3k^2}=0=$ 右边，即(*)式成立．

所以直线 HN 过点 $(0,-2)$．

综上所述，直线 HN 恒过定点 $(0,-2)$．

调和点列与线束

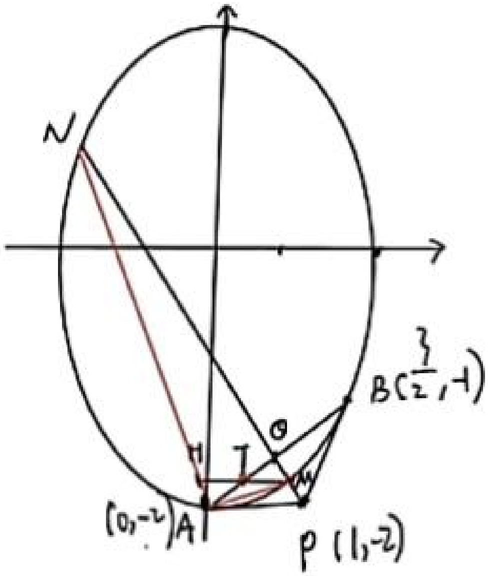
(2022 年高考全国乙卷数学（理）· 第 20 题）已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过

$A(0,-2), B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点.

(1) 求 E 的方程； $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足

$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点.



$P(1,-2) \to \frac{y\cdot(-2)}{4}+\frac{1\cdot x}{3}=1 \quad -6y+4x-12=0 \ (l_{AB})$

$\underbrace{2x-3y-6=0}$ (l_{AB})

(P, M, Q, N) 成调和点列

↓

$(\underbrace{AP}, \underbrace{AM, AQ, AN})$ 调和线束

$HN \parallel AP \Leftrightarrow \underbrace{H'T = TM}$

$MT = TH$

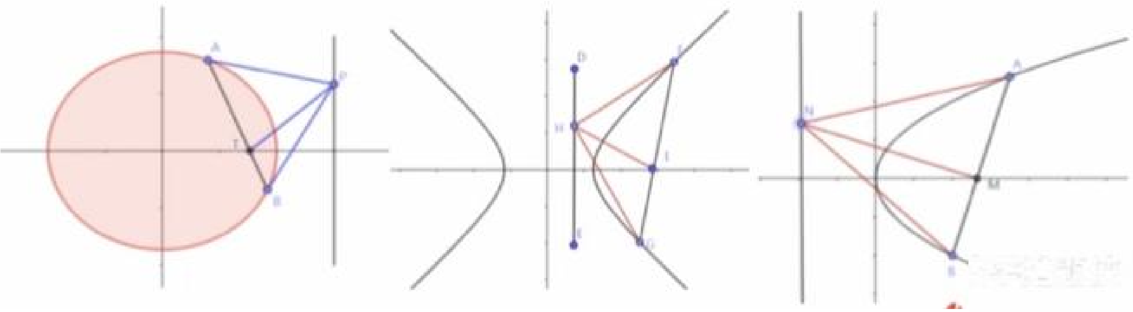
$H'T = TH$

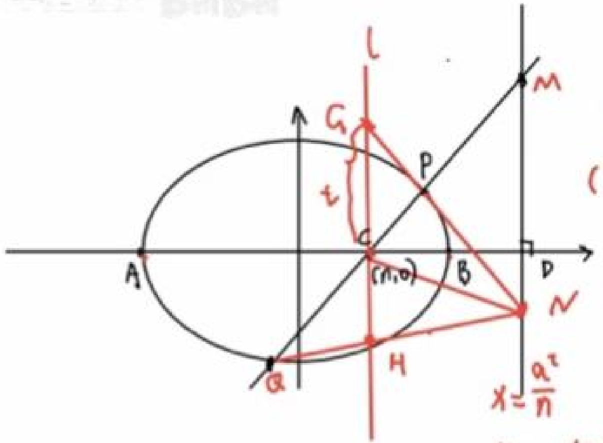
H', H 重合

$\Rightarrow N, H, A$ 三点共线

调和点列与线束

斜率等差模型





$C(n,0) \to \frac{x\cdot n}{a^2}+\frac{y\cdot 0}{b^2}=1 \Rightarrow x=\frac{a^2}{n}$

极点极线 → 调和点列（4个点）

（过极点作直线PQ与曲线两交点，与极线一交点）

1个　　2个　　1个

$\langle D,B,C,A\rangle$ 成调和点列

$\langle M,P,C,Q\rangle$ 成调和点列 ⇒ 调和线束.

$\langle NM,NP,NC,NQ\rangle$

$MN\parallel l \Rightarrow GC=CH$.

$k_{NP}+k_{NQ}=2k_{NC}$.

$N(\frac{a^2}{n},m)$　$C(n,0)$

$G(n,t)$　$H(n,-t)$

$k_{NP}=\frac{m-t}{\frac{a^2}{n}-n}$

$k_{NQ}=\frac{m+t}{\frac{a^2}{n}-n}$

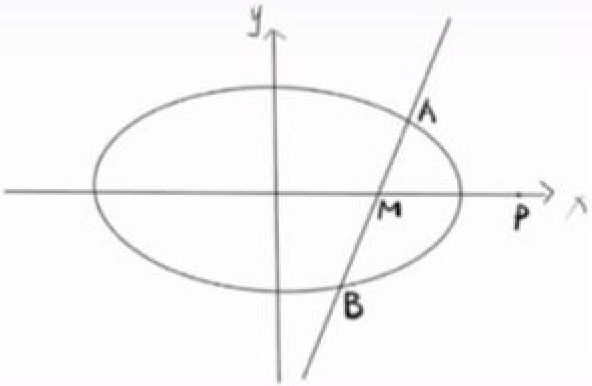
$k_{NC}=\frac{m}{\frac{a^2}{n}-n}$

$k_{NQ}+k_{NP}=\frac{2m}{\frac{a^2}{n}-n}=\frac{m}{\frac{a^2}{n}-n}\times 2$

$k_{NQ}+k_{NP}=2k_{NC}$

调和点列与线束

eg：已知椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，定点M(2,0)，设过点M且斜率为0的直线交椭圆C于A、B两点，试问x轴上是否存在定点P，使PM平分∠APB，若存在，求点P坐标



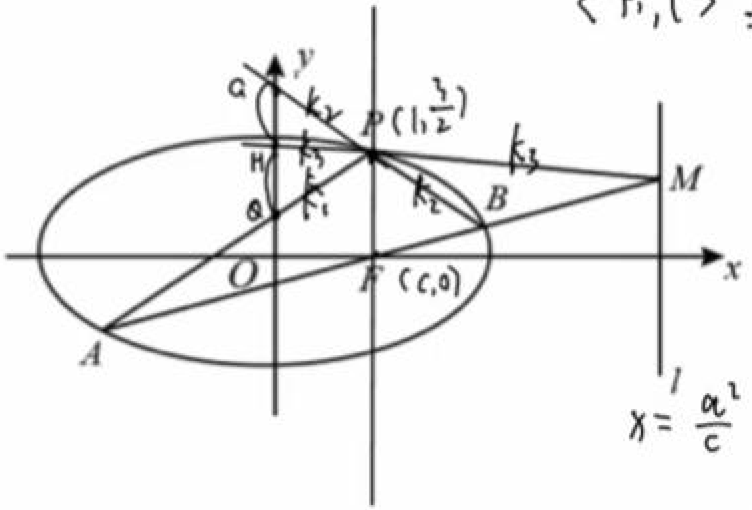
调和点列与线束

（2013·江西·高考（理））如图，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 P（1，$\frac{3}{2}$），离心率 $e=\frac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $x=4$.

（1）求椭圆 C 的方程；　$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记 PA，PB，PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3. 问：是否存在常数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.

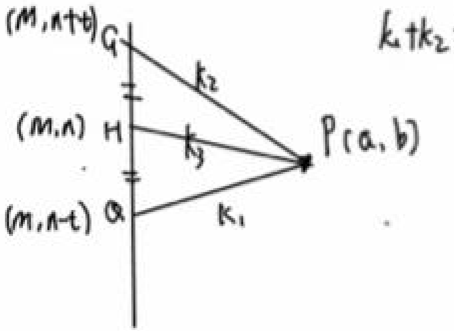
$\langle F, l\rangle \Rightarrow \langle A, F, B, M\rangle$ 调和点列 $\Rightarrow$ 调和线束.



$x=\frac{a^2}{c}$

$\langle PA, PF, PB, PM\rangle$

PH∥y轴 $\Rightarrow$ 且 GH=HQ.



$k_1+k_2=\frac{n-t-b}{m-a}+\frac{n+t-b}{m-a}=\frac{2(n-b)}{m-a}$

$k_3=\frac{n-b}{m-a}$

新高考新方向

由以上例题和解析可知，了解极点极线这一高等数学背景，是可以居高临下，看穿题目的，只是需要老师跟学生强调，考试过程中还是要用通性通法写过程，在已经知道答案的基础上去写过程思路会明朗很多. 除此之外，笔者在经过教学实践之后，也有所反思，极点极线的性质何其多，又哪止这些，但适不适合教给学生，还得“因材施教”，若是基础一般的学生，还是老实掌握通法为妙，不可好高骛远. 但作为老师还是要见多识广，教学时才可以游刃有余. 最后以单墫教授的一句话结尾：“解题研究无禁区，解题教学有禁忌.”

不当之处，敬请指正！

谢谢大家！