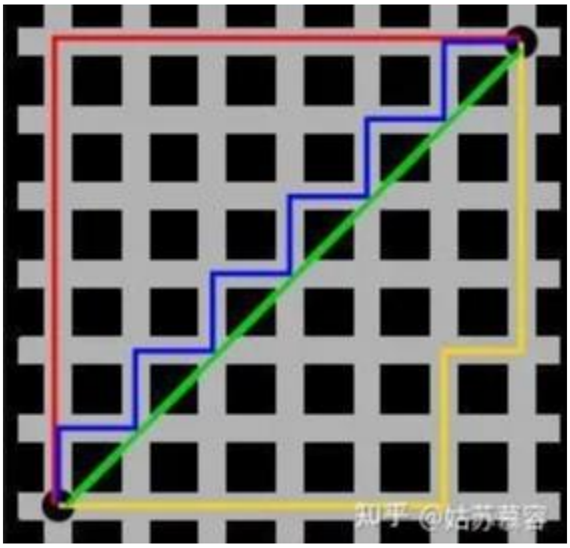
曼哈顿距离及应用

罗丽芳

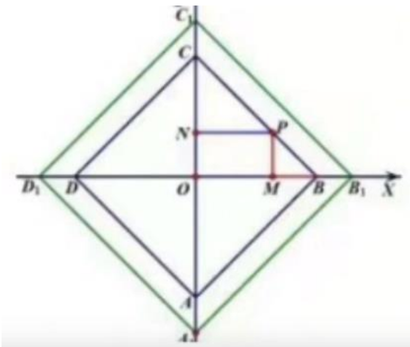


曼哈顿距离

图中红线代表曼哈顿距离，绿色代表欧氏距离，也就是直线距离，而蓝色和黄色代表等价的曼哈顿距离。

曼哈顿距离——两点在南北方向上的距离加上在东西方向上的距离， 即 d(i,j)=|xi-xj|+|yi-yj|.

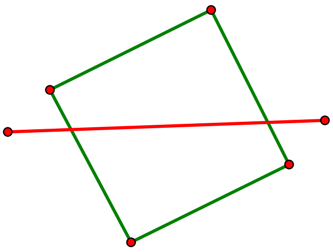
引理 1：平面内到一个定点的曼哈顿距离等于定值的点的轨迹是一个正方形.

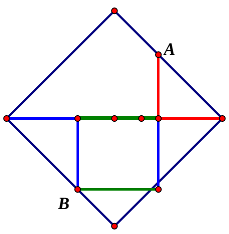


如图所示，当定点为坐标原点时，$L[O,P]=PM+PN=OM+MB=OB$（正方形，所以 $PM=MB$）

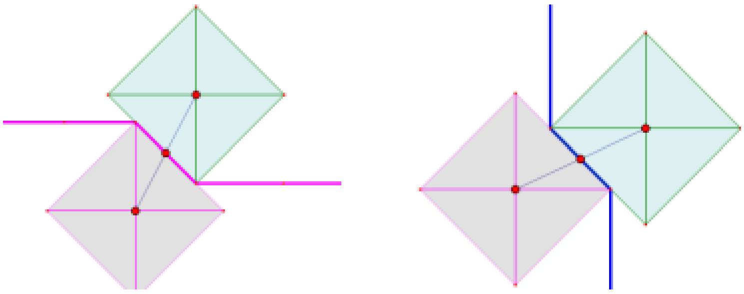
所以 P 的轨迹为正方形 ABCD，或者 $|x|+|y|=t$ 做出的图像也是类似的正方形。

其值为正方形对角线的一半，也等于在正方形对边任取两点 A，B，则值为 $|\dfrac{x_A+y_A-x_B-y_B}{2}|$，也等于正方形两平行边之间的水平距离或者垂直距离的一半（如图所示）。





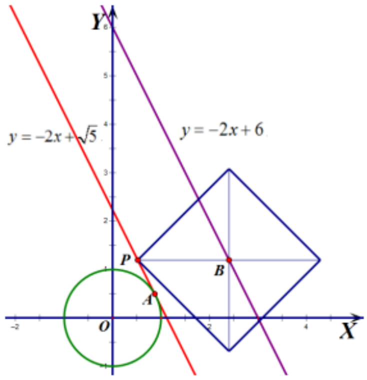
引理 2：到两个定点的曼哈顿距离相等的点的轨迹是一条折线.



【典例应用】

类型一：动点到定直线上点的曼哈顿距离的最值

1、已知 $A(x_1,y_1)$ 在单位圆上，$B(x_2,y_2)$ 在直线 $y=-2x+6$ 上，求 $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 的最小值.



分析：做与直线 $y=-2x+6$ 平行且与单位圆相切的直线，

易得切线方程为 $y=-2x+\sqrt{5}$，在直线 $y=-2x+6$ 上任取一点 B，做正方形交切线于 P，根据等值线的意义，

L（A，B）$\geq|PB|=\dfrac{6-\sqrt{5}}{2}=3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

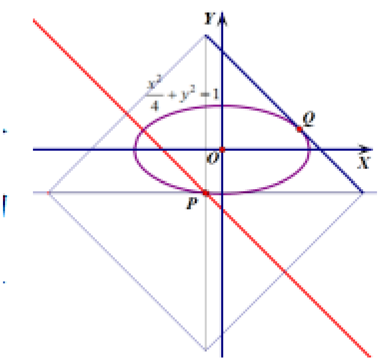
注：

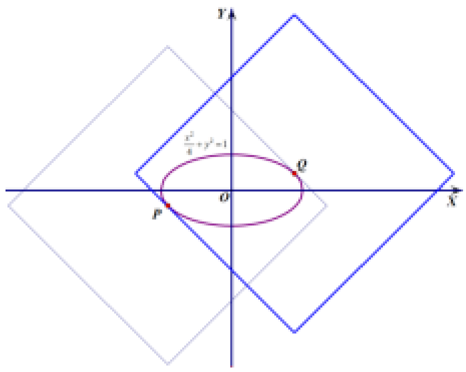
本题中，等值线的作用本质上是将两点的曼哈顿距离问题转化为与一条水平线截两条平行线所得线段长度的问题。

类型 2：一个曲线上任意两点之间的曼哈顿距离的最大值.

2、已知 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的两个动点，求 $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 的最大值.

分析：由对称性，不妨设 P 点在第三象限，根据等值线意义，作以点 P 为中心、四条边所在的直线斜率分别为±1 的正方形(如图 4)，则当图 4 边与椭圆相切时，L(P，Q)最大，并且易知，当点 P 运动时，切点 Q 是定点，因此只要作以点 Q 为中心的等值线(如图 5)，则当边与椭圆相切时，L(O，P)最大.易求得两条切线方程分别为：$y=-x+\sqrt{5}$ 和 $y=-x-\sqrt{5}$，所以 L(P，Q)的最大值为 $2\sqrt{5}$。





注：对于一类可以用正方形覆盖的曲线(如图 6)，求其上任意两点的曼哈顿距离的最大值问题，只要作一个四条边所在的直线斜率分别为±1 的正方形，使得该曲线恰好内切或内接与正方形，最后求出正方

形的对角线长即可.反过来，如果一条曲线，找不到一个正方形可以覆盖，那就意味着其上任意两点的曼哈顿距离没有最大值。

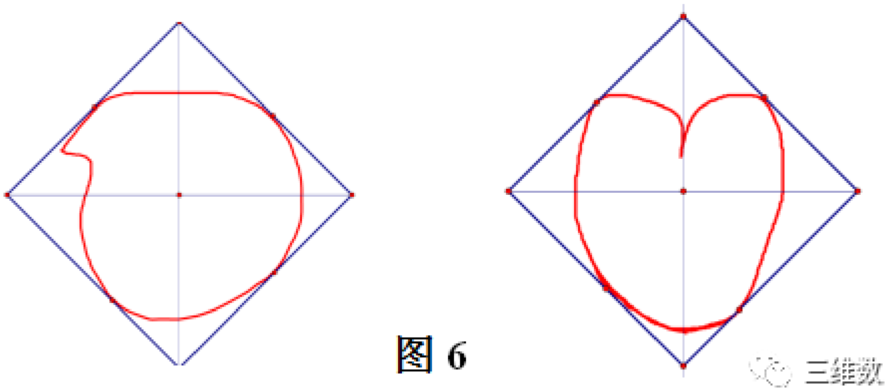


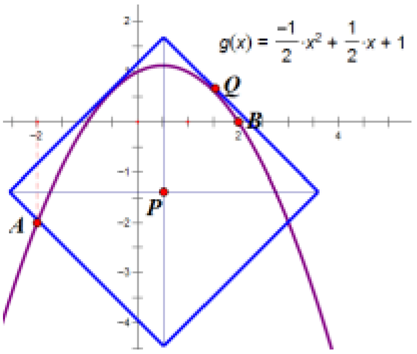
图 6

类型 3：定曲线上所有点与平面上任意一点的曼哈顿距离的最大值中的最小值.

3、已知 $f(x)=2|\sin x+2a|+|\cos 2x+\sin x+b|$ 的最大值为 $G(a,b)$，求 $G(a,b)$ 的最小值。

分析：令 $t=2\sin x$，则 $y=|t+2a|+|-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1+b|,t\in[-2,2]$，

这样本题可转化为求点 P(-2a，-b)到函数 $g(t)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1$ 图像上点的曼哈顿距离问题，作以点 P 为中心、四条边所在的直线斜率分别为±1 的正方形(如图 7)，由等值线意义可知，当抛物线弧内接(或内切)于正方形时， L(P，Q)取到最大值中的最小值；求得 A(-2，-2)，过 A 点且斜率为-1 的直线方程为 $y=-x-4$，过 Q 点的切线方程为 $y=-x+\frac{17}{8}$，得 L(P，Q)最大值中的最小值为 $\dfrac{\frac{17}{8}-(-4)}{2}=\frac{49}{16}$。



练习：（2021•济宁二模）“曼哈顿距离”是由赫尔曼·闵可夫斯基所创的词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语，例如在平面直角坐标系中，点 $P(x_1，y_1)$、$Q(x_2，y_2)$ 的曼哈顿距离为：

$L_{PQ}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$．若点 $P(1,2)$，点 Q 为圆 $C:x^2+y^2=4$ 上一动点，则 L_{PQ} 的最大值为(　　)

A．$1+\sqrt{2}$　　B．$1+2\sqrt{2}$　　C．$3+\sqrt{2}$　　D．$3+2\sqrt{2}$

【解答】解：由题意设 $P(2\cos\theta，2\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$，则 $L_{PQ}=|1-2\cos\theta|+|2-2\sin\theta|$，

当 $\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}$ 时，即当 $\theta\in[0，\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3},2\pi)$ 时，$L_{PQ}=2\cos\theta-1+2-2\sin\theta=1+2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，

$\because \theta \in [0,\ \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$，$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}] \cup [\frac{23\pi}{12},\ \frac{9}{4}\pi)$，则当 $\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$ 时，L_{PQ} 的最大值为 $1 + 2\sqrt{2}$；

当 $\cos\theta < \frac{1}{2}$ 时，即当 $\theta \in (\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3})$ 时，$L_{PQ} = 1 - 2\cos\theta + 2 - 2\sin\theta = 3 - 2\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$，

$\because \theta \in (\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}) \therefore \theta + \frac{\pi}{4} \in (\frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12})$，则当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$ 时，L_{PQ} 的最大值为 $3 + 2\sqrt{2}$．

综上所述，L_{PQ} 的最大值为 $3 + 2\sqrt{2}$．故选：D．

法 2：