

高中数学马尔科夫链问题（概率+数列）

2021 级高三数学 张红青

2023 年新高考 I 卷第 21 题的投篮问题是马尔可夫链；再往前的热点模考卷中，2023 年杭州二模第 21 题的赌徒输光问题是马尔可夫链，2023 年茂名二模的摸球问题是马尔可夫链；再往更前的 2019 年全国 I 卷药物试验也是马尔可夫链，在新人教 A 版选择性必修三 P91 页 拓展探索中的第 10 题是传球问题，是马尔科夫链的典型模型，可以看出自从新教材引入全概率公式（新人教 A 版选择性必修三 P49 页），可想而知，未来会有越来越多的递推型概率难题出现模考试题中！因此，在复习备考中全概率等系列内容需要格外关注马尔科夫链作为一种命题模型出现了，马尔科夫链在题中的体现可以简单的概括为全概率公式+数列递推。

随机游走与马尔科夫过程

一. 基本原理

1. 转移概率：对于有限状态集合 S ，定义： $P_{i,j} = P(X_{n+1}=j | X_n=i)$ 为从状态 i 到状态 j 的转移概率。

2. 马尔可夫链：若 $P(X_{n+1}=j | X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}=j | X_n=i) = P_{ij}$ ，

即未来状态 X_{n+1} 只受当前状态 X_n 的影响，与之前的 $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$ 无关。

3. 一维随机游走模型。

设数轴上一个点，它的位置只能位于整点处，在时刻 $t=0$ 时，位于点 $x=i (i \in N^+)$ ，

下一个时刻，它将以概率 α 或者 $\beta (\alpha \in (0,1), \alpha + \beta = 1)$ 向左或者向右平移一个单位。

若记状态 $X_{t=i}$ 表示：在时刻 t 该点位于位置 $x=i (i \in N^+)$ ，那么由全概率公式可得：

$$P(X_{t+1}=i) = P(X_{t=i-1}) \cdot P(X_{t+1}=i | X_{t=i-1}) + P(X_{t=i+1}) \cdot P(X_{t+1}=i | X_{t=i+1})$$

另一方面，由于 $P(X_{t+1}=i | X_{t=i-1}) = \beta, P(X_{t+1}=i | X_{t=i+1}) = \alpha$ ，代入上式可得：

$$P_i = \alpha \cdot P_{i+1} + \beta \cdot P_{i-1}.$$

进一步，我们假设在 $x=0$ 与 $x=m (m > 0, m \in N^+)$ 处各有一个吸收壁，当点到达吸收壁时被吸收，不再游走。于是， $P_0 = 0, P_m = 1$ 。随机游走模型是一个典型的马尔科夫过程。

进一步，若点在某个位置后有三种情况：向左平移一个单位，其概率为 a ，原地不动，其概率为 b ，向右平移一个单位，其概率为 c ，那么根据全概率公式可得：

$$P_i = a \cdot P_{i+1} + b \cdot P_i + c \cdot P_{i-1}$$

二、课本原题：人教 A 版数学《选择性必修三》P91

甲、乙、丙三人相互做传球训练，第 1 次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人. 求 n 次传球后球在甲手中的概率.

【解析】

记第 n 次传球后球在甲手中的概率为 P_n ，则第 $n-1$ 次传球后球在甲手中的概率为 P_{n-1} ，开始时球在甲手中，则 $P_0 = 1$.

若第 n 次传球后球在甲手中，则第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中，即第 $n-1$ 次传球后球在乙或丙手中，

所以第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中的概率为 $1-P_{n-1}$ ，又乙或丙在第 n 次把球传到甲手上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，

于是有 $\frac{1}{2}(1-P_{n-1}) = P_n$ ，即 $P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$ ， $n \geq 1$ ，

于是数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $P_0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，公比为 $-\frac{1}{2}$ 得等比数列，

所以 $P_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ，所以 $P_n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

三、高考真题回顾

1. (2023 新高考 1 卷 21 题) 乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且

$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，则 $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i$. 记前 n 次（即

从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y ，求 $E(Y)$.

【解析】 (1) 记“第 i 次投篮的人是甲”为事件 A_i ，“第 i 次投篮的人是乙”为事件 B_i ，

所以， $P(B_2) = P(A_1 B_2) + P(B_1 B_2) = P(A_1)P(B_2 | A_1) + P(B_1)P(B_2 | B_1)$
 $= 0.5 \times (1 - 0.6) + 0.5 \times 0.8 = 0.6$.

(2) 设 $P(A_i) = p_i$ ，依题可知， $P(B_i) = 1 - p_i$ ，则

$P(A_{i+1}) = P(A_i A_{i+1}) + P(B_i A_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1} | A_i) + P(B_i)P(A_{i+1} | B_i)$ ，

即 $p_{i+1} = 0.6p_i + (1 - 0.8) \times (1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2$ ，

构造等比数列 $\{p_i + \lambda\}$ ，

设 $p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{3}$, 则 $p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left(p_i - \frac{1}{3}\right)$,

又 $p_1 = \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以 $\left\{p_i - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列,

即 $p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$, $p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$.

(3) 因为 $p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

所以当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$,

故 $E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$.

2. (2019 全国 1 卷 21 题) 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列.

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0 = 0$, $p_8 = 1$, $p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i = 1, 2, \dots, 7)$, 其中 $a = P(X = -1)$, $b = P(X = 0)$, $c = P(X = 1)$. 假设 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$.

①证明: $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为等比数列;

②求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

【解析】(1) X 的所有可能取值为 -1, 0, 1.

$P(X = -1) = (1 - \alpha)\beta$, $P(X = 0) = \alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$, $P(X = 1) = \alpha(1 - \beta)$,

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1 - \alpha)\beta$	$\alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$	$\alpha(1 - \beta)$

(2) ①证明 由 (1) 得 $a = 0.4$, $b = 0.5$, $c = 0.1$.

因此 $p_i = 0.4p_{i-1} + 0.5p_i + 0.1p_{i+1}$, 故 $0.1(p_{i+1} - p_i) = 0.4(p_i - p_{i-1})$, 则

$$p_{i+1} - p_i = 4(p_i - p_{i-1}).$$

又因为 $p_1 - p_0 = p_1 \neq 0$ ，所以 $\{p_{i+1} - p_i\} (i=0, 1, 2, \dots, 7)$ 为公比为 4，首项为 p_1 的等比数列.

② 由①得

$$p_8 = p_8 - p_7 + p_7 - p_6 + \dots + p_1 - p_0 + p_0 = (p_8 - p_7) + (p_7 - p_6) + \dots + (p_1 - p_0) + p_0 = \frac{4^8 - 1}{3} \cdot p_1$$

由于 $p_8 = 1$ ，故 $p_1 = \frac{3}{4^8 - 1}$ ，

所以 $p_4 = (p_4 - p_3) + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0) + p_0 = \frac{4^4 - 1}{3} p_1 = \frac{1}{257}$.

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率. 由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4 = \frac{1}{257} \approx 0.0039$ ，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

四、巩固练习

1. (多选题) 马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，也是机器学习和人工智能的基石，为状态空间中经过从一个状态到另一个状态的转换的随机过程. 该过程要求具备“无记忆”的性质：下一状态的概率分布只能由当前状态决定，在时间序列中它前面的事件均与之无关. 甲乙两个口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n ，恰有 1 个黑球的概率为 p_n ，则下列结论正确的是 ()

A. $p_1 = \frac{5}{9}$

B. $P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$

C. 数列 $\left\{p_n - \frac{3}{5}\right\}$ 是等比数列

D. X_n 的数学期望 $E(X_n) = 1$

2. (单选题) 在概率论中，马尔可夫不等式给出了随机变量的函数不小于某正数的概率的上界，它以俄国数学家安德雷·马尔可夫命名，由马尔可夫不等式知，若 ξ 是只取非负值的随机变量，则对 $\forall a > 0$ ，都有 $P(\xi \geq a) \leq \frac{E(\xi)}{a}$. 某市去年的人均年收入为 10 万元，记“从该市任意选取 3 名市民，则恰有 1 名市民去年的年收入超过 100 万元”为事件 A ，其概率为 $P(A)$. 则 $P(A)$ 的最大值为 ()

A. $\frac{27}{1000}$

B. $\frac{243}{1000}$

C. $\frac{4}{27}$

D. $\frac{4}{9}$

3. 概率论中有很多经典的不等式，其中最著名的两个当属由两位俄国数学家马尔科夫和切比雪夫分别提出的马尔科夫 (Markov) 不等式和切比雪夫 (Chebyshev) 不等式. 马尔科夫不等式的形式如下：

设 X 为一个非负随机变量，其数学期望为 $E(X)$ ，则对任意 $\varepsilon > 0$ ，均有

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon},$$

马尔科夫不等式给出了随机变量取值不小于某正数的概率上界，阐释了随机变量尾部取值概率与其数学期望间的关系。当 X 为非负离散型随机变量时，马尔科夫不等式的证明如下：设 X 的分布列为 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，其中

$$p_i \in (0, +\infty), x_i \in [0, +\infty) (i = 1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1, \text{ 则对任意 } \varepsilon > 0,$$

$$P(X \geq \varepsilon) = \sum_{x_i \geq \varepsilon} p_i \leq \sum_{x_i \geq \varepsilon} \frac{x_i}{\varepsilon} p_i = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{x_i \geq \varepsilon} x_i p_i \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n x_i p_i = \frac{E(X)}{\varepsilon}, \text{ 其中符号 } \sum_{x_i \geq \varepsilon} A_i \text{ 表示对所有满足 } x_i \geq \varepsilon \text{ 的指标 } i \text{ 所对应的 } A_i \text{ 求和.}$$

切比雪夫不等式的形式如下：

设随机变量 X 的期望为 $E(X)$ ，方差为 $D(X)$ ，则对任意 $\varepsilon > 0$ ，均有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

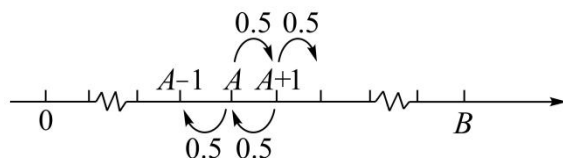
(1)根据以上参考资料，证明切比雪夫不等式对离散型随机变量 X 成立。

(2)某药企研制出一种新药，宣称对治疗某种疾病的有效率为80%。现随机选择了100名患者，经过使用该药治疗后，治愈的人数为60人，请结合切比雪夫不等式通过计算说明药厂的宣传内容是否真实可信。

4. 马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，也是机器学习和人工智能的基石，在强化学习、自然语言处理、金融领域、天气预测等方面都有着极其广泛的应用。其数学定义为：假设我们的序列状态是 $\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots$ ，那么 X_{t+1} 时刻的状态的条件概率仅依赖前一状态 X_t ，即 $P(X_{t+1} | \dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t) = P(X_{t+1} | X_t)$ 。

现实生活中也存在着许多马尔科夫链，例如著名的赌徒模型。

假如一名赌徒进入赌场参与一个赌博游戏，每一局赌徒赌赢的概率为50%，且每局赌赢可以赢得1元，每一局赌徒赌输的概率为50%，且赌输就要输掉1元。赌徒会一直玩下去，直到遇到如下两种情况才会结束赌博游戏：一种是手中赌金为0元，即赌徒输光；一种是赌金达到预期的 B 元，赌徒停止赌博。记赌徒的本金为 $A (A \in \mathbb{N}^*, A < B)$ ，赌博过程如下图的数轴所示。



当赌徒手中有 n 元 ($0 \leq n \leq B, n \in \mathbf{N}$) 时, 最终输光的概率为 $P(n)$, 请回答下列问题:

(1) 请直接写出 $P(0)$ 与 $P(B)$ 的数值.

(2) 证明 $\{P(n)\}$ 是一个等差数列, 并写出公差 d .

(3) 当 $A=100$ 时, 分别计算 $B=200, B=1000$ 时, $P(A)$ 的数值, 并结合实际, 解释当 $B \rightarrow \infty$ 时, $P(A)$ 的统计含义.

5. 马尔可夫链是因俄国数学家安德烈·马尔可夫得名, 其过程具备“无记忆”的性质, 即第 $n+1$ 次状态的概率分布只跟第 n 次的状态有关, 与第 $n-1, n-2, n-3, \dots$ 次状态是“没有任何关系的”. 现有甲、乙两个盒子, 盒子中都有大小、形状、质地相同的 2 个红球和 1 个黑球. 从两个盒子中各任取一个球交换, 重复进行 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次操作后, 记甲盒子中黑球个数为 X_n , 甲盒中恰有 1 个黑球的概率为 a_n , 恰有 2 个黑球的概率为 b_n .

(1) 求 X_1 的分布列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 求 X_n 的期望.

参考答案:

1. ACD

【详解】由题意, $p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$, 故 A 正确;

$P(X_1=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $P(X_1=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, 故 B 错误;

当 $n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$ 时,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5}{9} p_{n-1} + \frac{2}{3} P(X_{n-1}=0) + \frac{2}{3} P(X_{n-1}=2) = \frac{5}{9} p_{n-1} + \frac{2}{3} [P(X_{n-1}=0) + P(X_{n-1}=2)] \\ &= \frac{5}{9} p_{n-1} + \frac{2}{3} (1 - p_{n-1}) = -\frac{1}{9} p_{n-1} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } p_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{9} \left(p_{n-1} - \frac{3}{5} \right),$$

$$\text{因为 } p_1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{45},$$

故可知 $\left\{ p_n - \frac{3}{5} \right\}$ 是以 $-\frac{2}{45}$ 为首项, 以 $-\frac{1}{9}$ 为公比的等比数列, 故 C 正确;

$$P(X_n=1) = p_n, \quad P(X_n=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} P(X_{n-1}=0) = \frac{2}{9} p_{n-1} + \frac{1}{3} P(X_{n-1}=0),$$

$$P(X_n=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{1}{3} P(X_{n-1}=2) = \frac{2}{9} p_{n-1} + \frac{1}{3} P(X_{n-1}=2),$$

$$\text{因 } P(X_1=0) = P(X_1=2), \text{ 所以 } P(X_n=0) = P(X_n=2) = \frac{1-p_n}{2},$$

$$E(X_n) = 0 \times P(X_n=0) + 1 \times P(X_n=1) + 2 \times P(X_n=2) = 1 \times p_n + 2 \times \frac{1-p_n}{2} = 1, \text{ 故 D 正确,}$$

故选: ACD.

2. B

【详解】记该市去年人均收入为 X 万元, 从该市任意选取 3 名市民, 年收入超过 100 万元的人数为 Y . 设从该市任选 1 名市民, 年收入超过 100 万元的概率为 p ,

$$\text{则根据马尔可夫不等式可得 } p = P(X \geq 100) \leq \frac{E(X)}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \quad \therefore 0 \leq p \leq \frac{1}{10},$$

$$\text{因为 } Y \sim B(3, p), \text{ 所以 } P(A) = P(Y=1) = C_3^1 p(1-p)^2 = 3p(1-p)^2 = 3p^3 - 6p^2 + 3p,$$

$$\text{令 } f(p) = 3p^3 - 6p^2 + 3p, \text{ 则 } f'(p) = 9p^2 - 12p + 3 = 3(3p-1)(p-1),$$

$$\therefore 0 \leq p \leq \frac{1}{10}, \therefore 3p-1 < 0, p-1 < 0, \text{ 即 } f'(p) > 0,$$

$$\therefore f(p) \text{ 在 } \left[0, \frac{1}{10} \right] \text{ 上单调递增.}$$

$$\therefore f(p)_{\max} = f\left(\frac{1}{10}\right) = 3 \times \frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000}, \text{ 即 } P(A)_{\max} = \frac{243}{1000}.$$

故选: B

3. (1) 证明见解析(2)不可信

【详解】(1) 法一: 对非负离散型随机变量 $[X - E(X)]^2$ 及正数 ε^2 使用马尔科夫不等式,

$$\text{有 } P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P([X - E(X)]^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[X - E(X)]^2}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

法二: 设 X 的分布列为

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $p_i, x_i \in (0, +\infty) (i = 1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1$, 记 $\mu = E(X)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = \sum_{|x_i - \mu| \geq \varepsilon} P_i \leq \sum_{|x_i - \mu| \geq \varepsilon} \frac{(x_i - \mu)^2}{\varepsilon^2} P_i = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{|x_i - \mu| \geq \varepsilon} (x_i - \mu)^2 P_i \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P_i = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

(2) 设在 100 名患者中治愈的人数为 X . 假设药企关于此新药有效率的宣传内容是客观真实的, 那么在此假设下 $X \sim B(100, 0.8), E(X) = 100 \times 0.8 = 80, D(X) = 100 \times 0.8 \times (1 - 0.8) = 16$.

由切比雪夫不等式, 有 $P(X \leq 60) \leq P(|X - 80| \geq 20) \leq \frac{D(X)}{20^2} = 0.04$.

即在假设下, 100 名患者中治愈人数不超过 60 人的概率不超过 0.04, 此概率很小,

据此我们有理由推断药厂的宣传内容不可信.

4. (1) $P(0) = 1, P(B) = 0$ (2) 证明见解析; $d = -\frac{1}{B}$

(3) $B = 200$ 时, $P(A) = 50\%$, 当 $B = 1000$ 时, $P(A) = 90\%$, 统计含义见解析

【详解】(1) 当 $n = 0$ 时, 赌徒已经输光了, 因此 $P(0) = 1$.

当 $n = B$ 时, 赌徒到了终止赌博的条件, 不再赌了, 因此输光的概率 $P(B) = 0$.

(2) 记 M : 赌徒有 n 元最后输光的事件, N : 赌徒有 n 元上一场赢的事件,

$$P(M) = P(N)P(M|N) + P(\bar{N})P(M|\bar{N}),$$

$$\text{即 } P(n) = \frac{1}{2}P(n-1) + \frac{1}{2}P(n+1), \text{ 所以 } P(n) - P(n-1) = P(n+1) - P(n),$$

所以 $\{P(n)\}$ 是一个等差数列,

设 $P(n) - P(n-1) = d$, 则 $P(n-1) - P(n-2) = d, \dots, P(1) - P(0) = d$,

累加得 $P(n) - P(0) = nd$ ，故 $P(B) - P(0) = Bd$ ，得 $d = -\frac{1}{B}$ ，

(3) $A=100$ ，由 $P(n) - P(0) = nd$ 得 $P(A) - P(0) = Ad$ ，即 $P(A) = 1 - \frac{A}{B}$ ，

当 $B=200$ 时， $P(A) = 50\%$ ，当 $B=1000$ 时， $P(A) = 90\%$ ，

当 $B \rightarrow \infty$ 时， $P(A) \rightarrow 1$ ，因此可知久赌无赢家，

即便是一个这样看似公平的游戏，只要赌徒一直玩下去就会 100% 的概率输光。

5. (1) 答案见解析 (2) $a_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n$ (3) 1

【详解】(1) (1) 由题可知， X_1 的可能取值为 0, 1, 2. 由相互独立事件概率乘法公式可知：

$$P(X_1=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}; P(X_1=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}; P(X_1=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

故 X_1 的分布列如下表：

X_1	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) 由全概率公式可知：

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= P(X_n=1) \cdot P(X_{n+1}=1|X_n=1) + P(X_n=2) \cdot P(X_{n+1}=1|X_n=2) \\ &+ P(X_n=0) \cdot P(X_{n+1}=1|X_n=0) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) P(X_n=1) + \left(\frac{2}{3} \times 1\right) P(X_n=2) + \left(1 \times \frac{2}{3}\right) P(X_n=0) \\ &= \frac{5}{9} P(X_n=1) + \frac{2}{3} P(X_n=2) + \frac{2}{3} P(X_n=0), \end{aligned}$$

$$\text{即： } a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{2}{3} b_n + \frac{2}{3} (1 - a_n - b_n),$$

$$\text{所以 } a_{n+1} = -\frac{1}{9} a_n + \frac{2}{3}, \text{ 所以 } a_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{9} \left(a_n - \frac{3}{5}\right),$$

又 $a_1 = P(X_1=1) = \frac{5}{9}$ ，所以，数列 $\left\{a_n - \frac{3}{5}\right\}$ 为以 $a_1 - \frac{3}{5} = -\frac{2}{45}$ 为首项，以 $-\frac{1}{9}$ 为公比的等比数

列，所以 $a_n - \frac{3}{5} = -\frac{2}{45} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n$ ，即： $a_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n$ 。

(3) 由全概率公式可得：

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = 2) \\
&= P(X_n = 1) \cdot P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) + P(X_n = 2) \cdot P(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) \\
&+ P(X_n = 0) \cdot P(X_{n+1} = 2 | X_n = 0) \\
&= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \cdot P(X_n = 1) + \left(\frac{1}{3} \times 1\right) \cdot P(X_n = 2) + 0 \cdot P(X_n = 0), \\
&\text{即: } b_{n+1} = \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3}b_n,
\end{aligned}$$

$$\text{又 } a_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n, \text{ 所以 } b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{9} \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right),$$

$$\text{所以 } b_{n+1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \left[b_n - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right],$$

$$\text{又 } b_1 = P(X_1 = 2) = \frac{2}{9}, \text{ 所以 } b_1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9} - \frac{1}{5} - \frac{1}{45} = 0,$$

$$\text{所以 } b_n - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = 0, \text{ 所以 } b_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{9}\right)^n,$$

$$\text{所以 } E(X_n) = a_n + 2b_n + 0(1 - a_n - b_n) = a_n + 2b_n = 1.$$