

## 阿波罗尼斯圆

韩淑勤

**阿氏圆的定义：**已知平面上两个定点 A、B，当动点 P 符合到两定点的距离比值为不等于 1 的定值时，点 P 的轨迹是个圆。

**常规阿氏圆的求解方法：**

**例：**已知 A(-2, 0), B(1, 0)，动点 P 符合到 A 点的距离与 P 到 B 点的距离之比为 2，求 P 的轨迹方程。

解法一：设点 P (x, y)，由题可知  $\frac{|PA|}{|PB|} = 2$ ，

即  $\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 2$ ，平方移项可得  $(x+2)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$ ，

展开得  $x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$ ，

化简得  $x^2 + y^2 - 4x = 0$

也可写成  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，圆心 O (2, 0)，半径是 2。

思路和方法虽然简单，但是运算量有点多，如果题中的定点或比值未知时，这个计算就更复杂了，如果我们对这个圆的性质了解更多一些，就可以列其它方程来求解啦。

**定义：反演点、反演(inverse points; inverse)定义：**是在圆或球直径上的一对点 P 与 P'，如果它们到中心 O 之距离的乘积，等于半径 r 的平方，则称它们互为反演点，O 称为反演中心，r 称为反演半径。（即圆心和反演点符合： $|OP||OP'| = r^2$ ）从 P 变到 P' 或从 P' 变到 P 的变换，称为反演变换，或反演映射，简称反演。

可以借助反演点的性质应用来找圆心和半径。

我们继续上面的例题，由已求出的圆心坐标 O (2, 0)，半径为 2，两定点 A(-2, 0), B(1, 0) 可知  $|OA|=4$ ， $|OB|=1$ ， $r=2$ ，符合  $|OA||OB| = r^2$ ，即阿氏圆中的两定点 A、B 符合反演的规律。（完整证明过程先略，感兴趣可以课后联系）

**阿氏圆的两个性质：**

**性质 1. 圆心 O 在定点 A、B 的延长线上 k 靠近 P 距离定点较近的那一边；eg.  $|PA|=2|PB|$ ，**

**圆心在 AB 延长线靠近 B 点的那一端；**

**性质 2.  $|OA||OB| = r^2$**

解法二：设圆心为  $D(t,0)$ ,

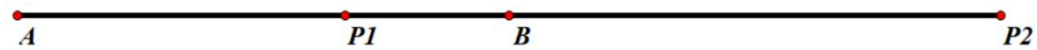
当  $P$  在  $AB$  线段上时, 根据  $|PA| = 2|PB|$  可知  $P$  点坐标为  $(0,0)$ , 所以  $r$  可表示为  $|DP|=t$ ,

因为  $|DA|=t+2$ ,  $|DB|=t-1$ , 根据  $|DA||DB|=r^2$ , 得  $(t+2)(t-1)=t^2$ , 解得  $t=2$ ,

所以圆心为  $(2,0)$ , 半径是 2。

**定义：调和点列**

点  $P_1$  在线段  $AB$  上且满足  $\frac{AP_1}{BP_1} = \lambda (\lambda \neq 0)$



点  $P_2$  在线段  $AB$  的延长线上且满足  $\frac{AP_2}{BP_2} = \lambda (\lambda \neq 0)$

则称  $A, B$  两点为基点, 点  $P_1$  为内分点, 点  $P_2$  为外分点,  $A, P_1, B, P_2$  构成调和点列

性质 3: 调和性  $\frac{1}{|AP_1|} + \frac{1}{|AP_2|} = \frac{2}{|AB|}$

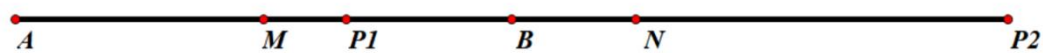
性质 4: 共轭性

$A, P_1, B, P_2$  和  $P_2, B, P_1, A$  都构成调和点列 (从左右两边看都成立)

$$\text{即 } \frac{1}{|P_2A|} + \frac{1}{|P_2B|} = \frac{2}{|P_1P_2|} \text{ 也成立}$$

性质 4: 等比性

取  $AB$  的中点为  $M$ , 取  $P_1P_2$  的中点为  $N$ , 则有

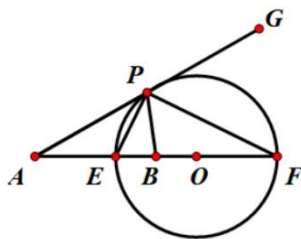


$$\begin{aligned} |MA|^2 &= |MB|^2 = |MP_1| \cdot |MP_2| \\ |NP_1|^2 &= |NP_2|^2 = |NA| \cdot |NB| \\ |AB| \cdot |P_1P_2| &= 2|AP_1| \cdot |BP_2| = 2|AP_2| \cdot |BP_1| \end{aligned}$$

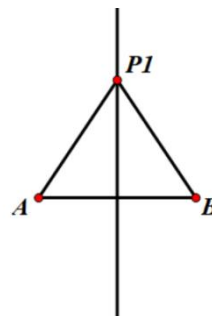
由阿氏圆定义可知这个动点  $P$  的轨迹是一个圆。

阿氏圆性质 5. 此圆与直线  $AB$  交于点  $E$  和点  $F$ , 点  $E$  以定比内分线段  $AB$ , 点  $F$  以定比外分线段  $AB$

当  $k = 1$ , 此动点在定线段的垂直平分线上



$$\frac{PA}{PB} = k, \text{ 且 } \frac{FA}{FB} = \frac{EA}{EB} = k$$



$$\frac{PA}{PB} = 1$$

性质 6. 证明: 取点  $O$  满足  $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB} = k$ , 得三角形相似即  $\triangle POA \sim \triangle BOP$

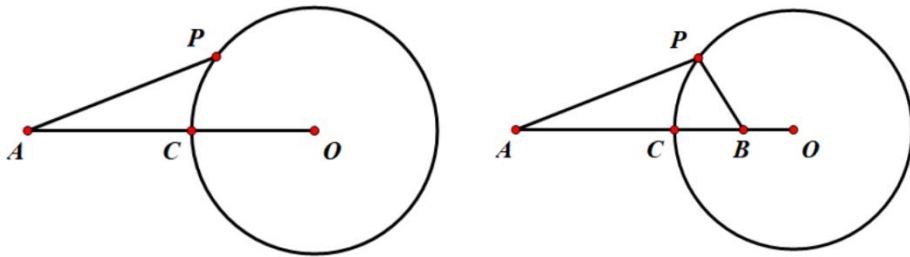
$\because OA$  固定,  $\therefore OP = \frac{OA}{k}$  为定值, 则圆以  $O$  为圆心,  $OP$  为半径

性质 7: 在  $\triangle ABP$  中,  $EP$  是内角平分线,  $FP$  是外角平分线, 所以古中国叫它内外圆

**题型应用:** 一个固定圆上动点  $P$  和一个圆外定点  $A$ , 连接圆外定点  $A$  和圆心  $O$ , 与圆交于点  $C$ , 则在线段  $OC$  上内只能找到一个固定点  $B$ , 使得  $PA = kPB$  恒成立

根据调和点列或反演点得  $OB = \frac{OC^2}{OA}$

切记: 一个固定的圆和圆外一个定点, 组成的阿氏圆, 只能找到一个固定的  $B$  点, 只能有一个对应的比, 且  $PA > PB$ ,  $PA = kPB (k > 0)$



**【例题 1】** 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名, 他发现: 平面内到两个定点  $A$ 、 $B$  的距离之比为定值  $\lambda$  ( $\lambda > 0$  且  $\lambda \neq 1$ ) 的点所形成的图形是圆. 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆. 已知在平面直角坐标系  $xOy$  中,

$A(-2, 0)$ ,  $B(4, 0)$ . 点  $P$  满足  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ , 设点  $P$  所构成的曲线为  $C$ , 下列结论正确的是 ( )

- A.  $C$  的方程为  $(x+4)^2 + y^2 = 16$
- B. 在  $C$  上存在点  $D$ , 使得  $D$  到点  $(1, 1)$  的距离为 10
- C. 在  $C$  上存在点  $M$ , 使得  $|MO| = 2|MA|$
- D.  $C$  上的点到直线  $3x - 4y - 13 = 0$  的最大距离为 9

**【答案】AD**

**【详解】解:** 设圆心  $C(t, 0)$  ( $t < -2$ ), 当  $P$  在线段  $AB$  上时, 坐标为  $(0, 0)$

所以  $r = -t, |CA| = -2 - t, |CB| = 4 - t,$

由  $|CA| \cdot |CB| = r^2$  得  $(-2 - t)(4 - t) = (-t)^2$  解得  $t = -4, r = 4$ , A 正确;

点  $(1, 1)$  到圆上的点的最大距离  $\sqrt{(-4-1)^2 + (1-0)^2} + 4 < 10$ , 故不存在点  $D$  符合题意, 故 B 错误.

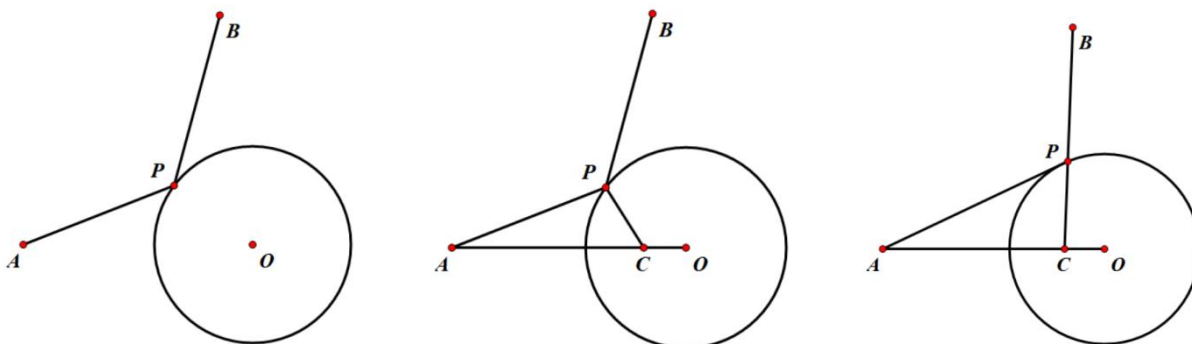
设  $M(x_0, y_0)$ , 由  $|MO| = 2|MA|$ , 得  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2\sqrt{(x_0+2)^2 + y_0^2}$ , 又  $(x_0+4)^2 + y_0^2 = 16$ , 联立方程消去  $y_0$  得  $x_0 = 2$ , 解得  $y_0$  无解, 故 C 错误;

$C$  的圆心  $(-4, 0)$  到直线  $3x-4y-13=0$  的距离为  $d = \frac{|3 \times (-4) - 13|}{5} = 5$ ，且曲线  $C$  的半径为 4，则  $C$  上的点到直线  $3x-4y-13=0$  的最大距离  $d+r=5+4=9$ ，故 D 正确。

【例题 2】已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  和点  $A(-2, 0)$ ，若定点  $B(b, 0)$  ( $b \neq -2$ ) 和常数  $k$  满足：对圆  $O$  上任意一点  $M$ ，都有  $|MB|=k|MA|$ ，则  $b=$ \_\_\_\_\_， $k=$ \_\_\_\_\_。

解：已知  $M$  在圆  $O$  上， $A$ 、 $B$  应互为反演点， $|OA| \cdot |OB| = r^2$ ，即  $2 \times |b| = 1$ ，且  $b$  应在线段  $AO$  之间，所以  $b = -\frac{1}{2}$ ，当  $M$  为  $(-1, 0)$  时， $k = \frac{1}{2}$ 。

当遇到  $PA + kPB$  型的最值问题，要将两线段的系数变成相同的，利用  $kPB = PC$ ，将  $PA + kPB$  可转化为  $PA + PC$



当点  $APC$  三点共线时， $PA + PC$  最小，即  $PA + kPB$  值最小。

例 3 在平面直角坐标系中，已知点  $B(4, 0)$ ， $D(1, 4)$ ， $C$  为圆  $M: (x+4)^2 + y^2 = 16$  上的动点，则  $|CB| + 2|CD|$  的最小值为\_\_\_\_\_。

【解析】先根据阿氏圆性质，找到与点  $B(4, 0)$  对应的圆  $M$  内的定点  $A$ ，

由  $|MA| \cdot |MB| = r^2$  可得  $|MA| = 2$

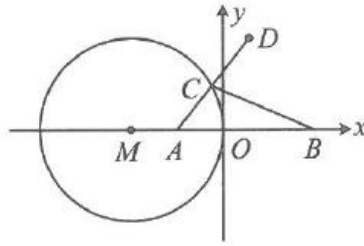
所以  $A(-2, 0)$ ，且对于圆  $M$  上的任意一点  $C$ ，

都有  $\frac{|CB|}{|CA|} = \sqrt{\frac{|MB|}{|MA|}} = 2$ ，从而  $|CB| = 2|CA|$

所以  $|CB| + 2|CD| = 2|CA| + 2|CD| = 2(|CA| + |CD|)$ ，如图，

由图可知当点  $C$  在圆  $M$  上运动到如图所示位置时， $|CA| + |CD|$  取得最小值，

且最小值为  $|AD| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2} = 5$ ，所以  $|CB| + 2|CD|$  的最小值为 10。



【答案】10

练习

知平面向量  $a, b, c$  满足  $a \perp b$ , 且  $|a + b + c| = 1$ , 则  $|b + c| + 2|c|$  值为

A.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$

B.  $\sqrt{15}$

C.  $\frac{\sqrt{17}}{2}$

D.  $\sqrt{17}$

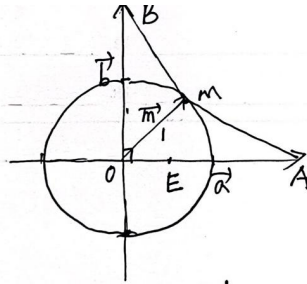
设  $m = a + b + c$ , 则  $|m| = 1$

$$b + c = m - a, \quad a + c = m - b$$

$$\therefore |b + c| + 2|a + c|$$

$$= |m - a| + 2|m - b|$$

$$= MA + 2MB$$



$$\text{由 } OZ \cdot OA = |z|^2 \therefore OZ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{MA}{MZ} = 2$$

$$\therefore MA + 2MB = 2MZ + 2MB \geq \sqrt{17}$$

例 4. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 6$ ,  $BC = 2AC$ , 则  $\triangle ABC$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_.

【解析】解法 1: 设  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ , 则  $c = 6$ ,  $a = 2b$ ,

$$\text{由余弦定理, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5b^2 - 36}{4b^2},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = b^2 \sin C = b^2 \sqrt{1 - \cos^2 C} = b^2 \sqrt{1 - \left(\frac{5b^2 - 36}{4b^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 - \frac{25b^4 - 360b^2 + 36^2}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{-9(b^4 - 40b^2 + 144)} = \frac{1}{4} \sqrt{-9(b^2 - 20)^2 + 9 \times 256},$$

所以当  $b = 2\sqrt{5}$  时,  $\triangle ABC$  的面积取得最大值 12.

解法 2: 以  $AB$  中点  $O$  为原点建立如图 1 所示的平面直角坐标系,

则  $A(-3, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , 设  $C(x, y)$ ,

因为  $BC = 2AC$ ，所以  $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$ ，化简得： $(x+5)^2 + y^2 = 16$  ( $y \neq 0$ )

所以点  $C$  的轨迹是以  $M(-5,0)$  为圆心，4 为半径的圆（不含与  $x$  轴的交点），如图 1，

由图可知， $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ 。

解法 3：由  $BC = 2AC$  可知点  $C$  的轨迹是阿氏圆，设圆心为  $M$ ，半径为  $r$ ，如图 2，

由阿氏圆性质， $r = \frac{\lambda d}{|\lambda^2 - 1|} = \frac{2 \times 6}{|2^2 - 1|} = 4$ ，结合图形可得  $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ 。

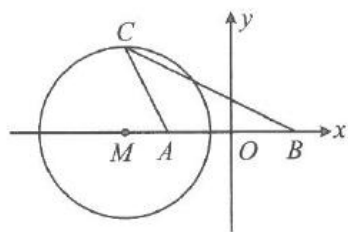


图1

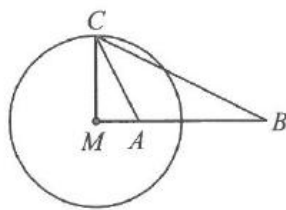


图2

**【答案】** 12

例 5. 在平面直角坐标系中，已知点  $B(4,0)$ ， $D(-4,2)$ ， $C$  为圆  $M:(x+4)^2 + y^2 = 16$  上的动点，则  $|CB| - 2|CD|$  的最大值为\_\_\_\_\_。

**【解析】** 先根据阿氏圆性质，找到与点  $B(4,0)$  对应的圆  $M$  内的定点  $A$ ，

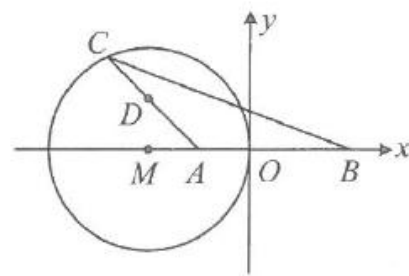
由  $|MA| \cdot |MB| = r^2$  可得  $|MA| = 2$ ，

所以  $A(-2,0)$ ，且对于圆  $M$  上的任意一点  $C$ ，

都有  $\frac{|CB|}{|CA|} = \sqrt{\frac{|MB|}{|MA|}} = 2$ ，从而  $|CB| = 2|CA|$

由图可知当点  $C$  在圆  $M$  上运动到如图所示位置时， $|CA| - |CD|$  取得最大值，

且最大值为  $|AD| = 2\sqrt{2}$ ，所以  $|CB| - 2|CD|$  的最大值为  $4\sqrt{2}$ 。



**【答案】**  $4\sqrt{2}$