浅谈立体几何中的截面

（球与截面的的交线问题）

2023.11.2

赵永涛

一、立体几何中的截面问题：

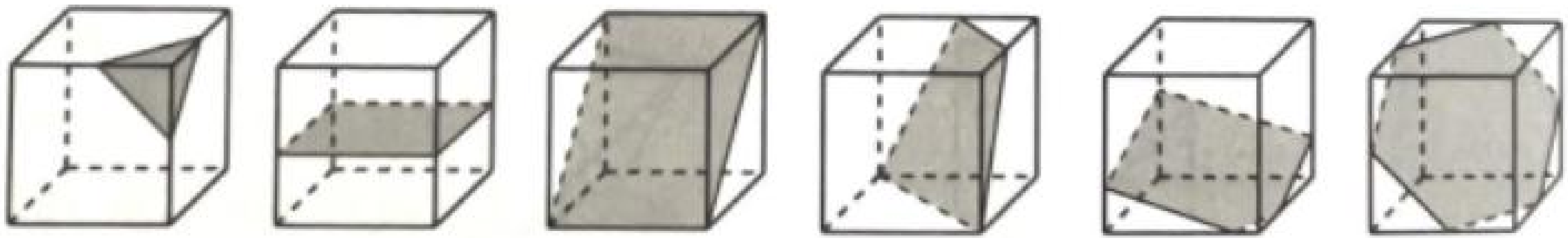
例 1、(2018 年高考数学课标卷 I（理）·第 12 题)已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为（　　）

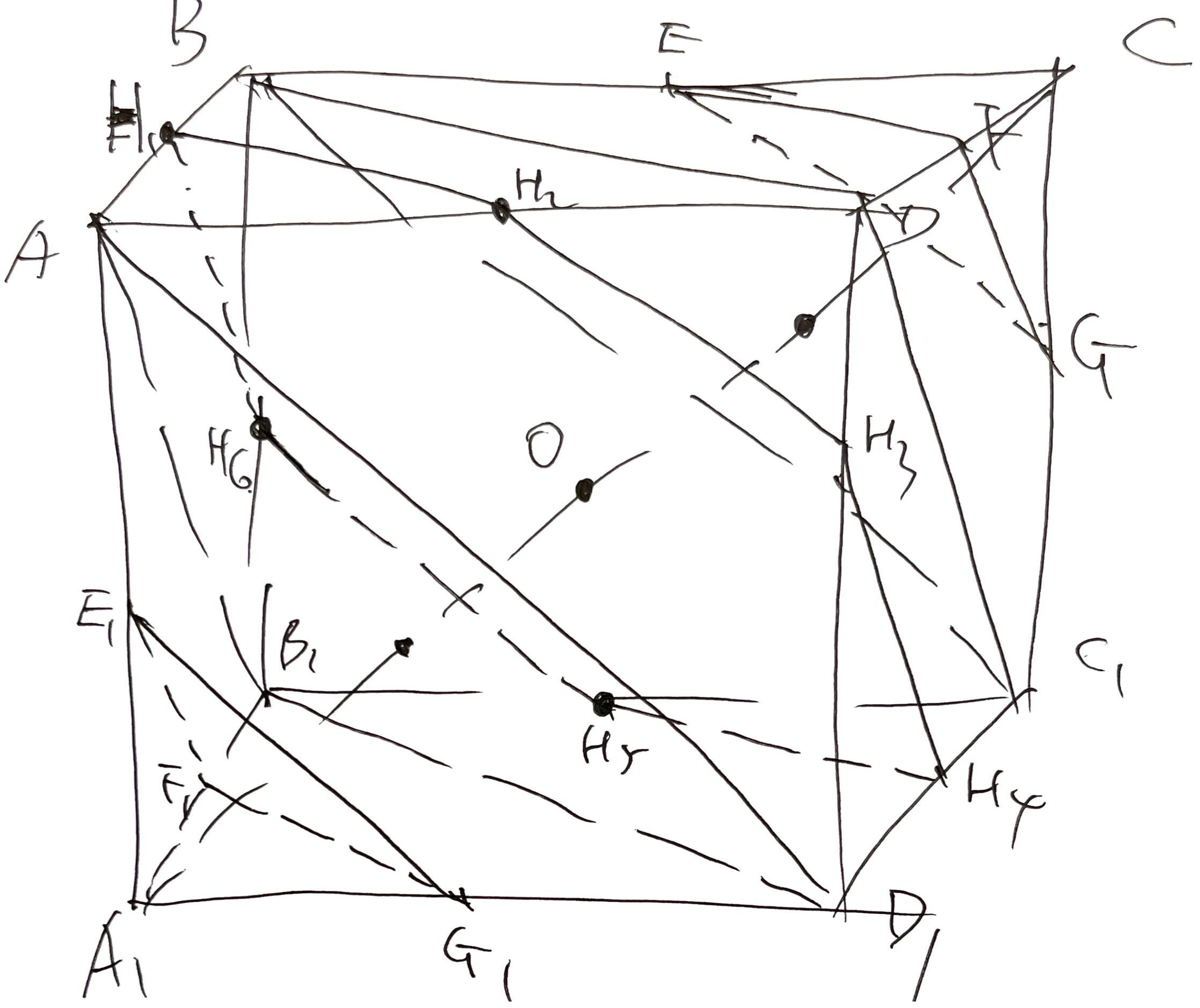
A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

棱长

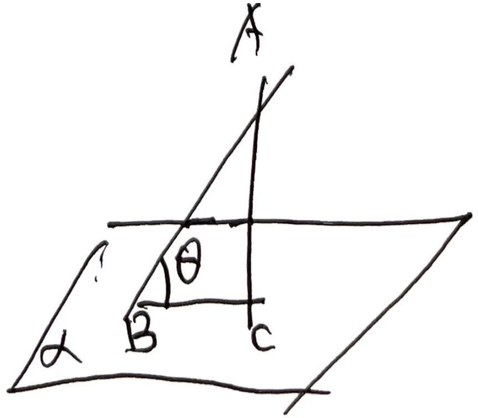
【答案】A　　必修四课本 P72（2019 年 7 月第一版）

参考下图，用 GeoGebra 作出正方体，然后作出空间中的平面，探索正方体截面的形状。





① 线面角:



② 转化: $A_1C \perp \alpha$

动画演示

探究3：截面为六边形。如图11，根据探究1，我们仅考虑截面与平面AB_1D_1平行的平面。由线面平行、面面平行的判定定理和性质定理可得EF，JG，IH互相平行，$GH // EJ$，$FG // IJ$，且$EF=HG=IJ$，$HI=GF=EJ$，我们把六边形从正方体中“移出来”，放在平面中研究（立体图形平面化）。不妨设$C_1H=x(0<x<1)$，则不难求得$EF=HG=IJ=\sqrt{2}(1-x)$，$HI=GF=EJ=\sqrt{2}x$。

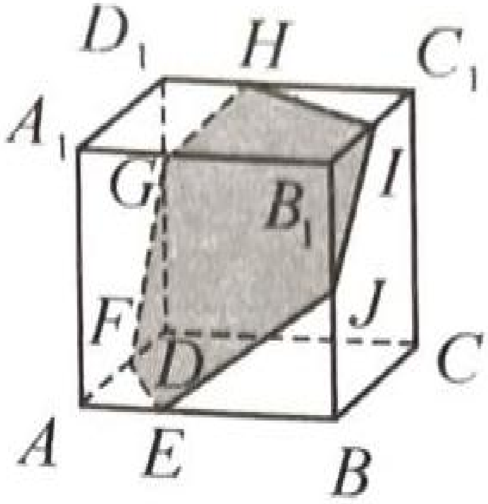


图11

如图 12，六边形 $EFGHIJ$ 的面积为：

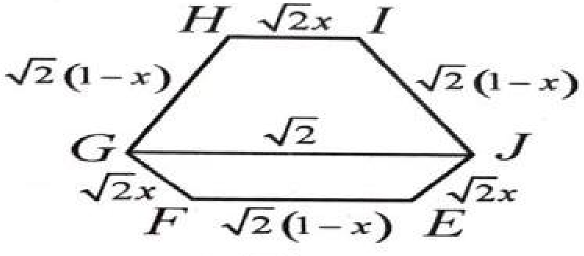


图 12

$$S_{六边形EFGHIJ}=S_{梯形GHIJ}+S_{梯形EFGJ}=$$

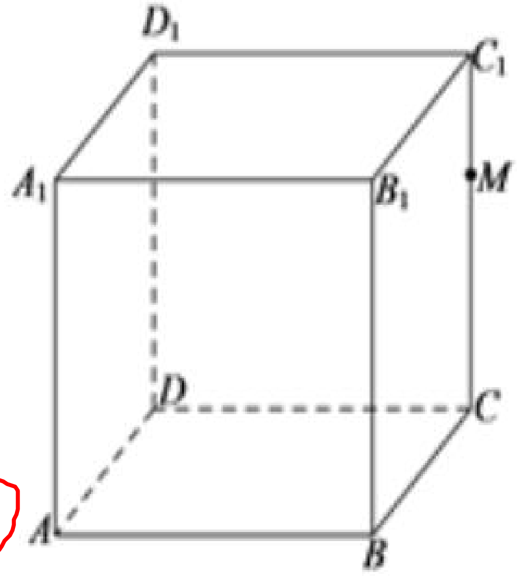
$$\frac{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2(1-x)^2-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{2}\right)^2}}{2}+$$

$$\frac{[\sqrt{2}(1-x)+\sqrt{2}]\cdot\sqrt{2x^2-\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2}}{2}=$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2x-2x^2)(0<x<1)$。

显然，当 $x=\frac{1}{2}$ 时（正六边形），六边形 $EFGHIJ$ 的面积最大，最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，其实如果 $x=0$ 或 $x=1$，那么截面图形就是正 $\triangle BDC_1$ 和正 $\triangle AB_1D_1$，可以看成是六边形 $EFGHIJ$ 的两个极限状态，此时面积均为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

例 2、 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为 2，如图，M为CC_1上的动点，$AM\perp$平面α.下面说法正确的是 (　　)



A. 直线AB与平面α所成角的正弦值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. 点M与点C_1重合时，平面α截正方体所得的截面，其面积越大，周长就越大

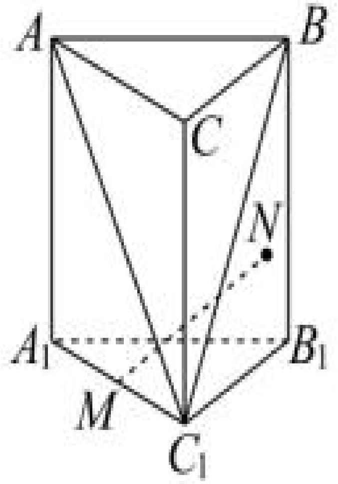
C. 点M为CC_1的中点时，若平面α经过点B，则平面α截正方体所得截面图形是等腰梯形

D. 已知N为DD_1中点，当$AM+MN$的和最小时，M为CC_1的中点

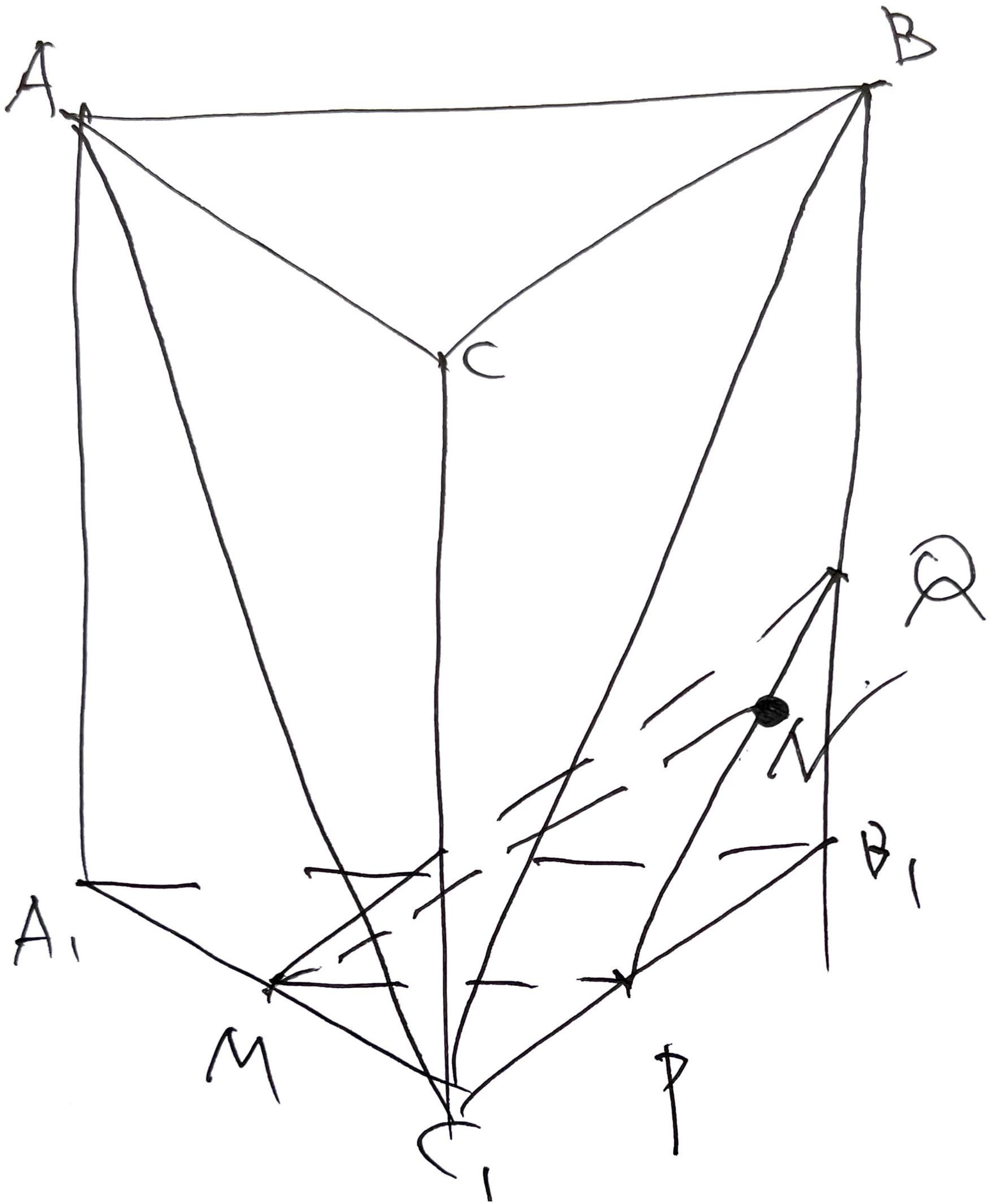
【答案】AC

周测三—8

例 3、如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是 2，侧棱长是 $2\sqrt{5}$，M 为 A_1C_1 的中点，N 是侧面 BCC_1B_1 上一点，且 $MN//$ 平面 ABC_1，则线段 MN 的最大值为（　　）



A．$2\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．4

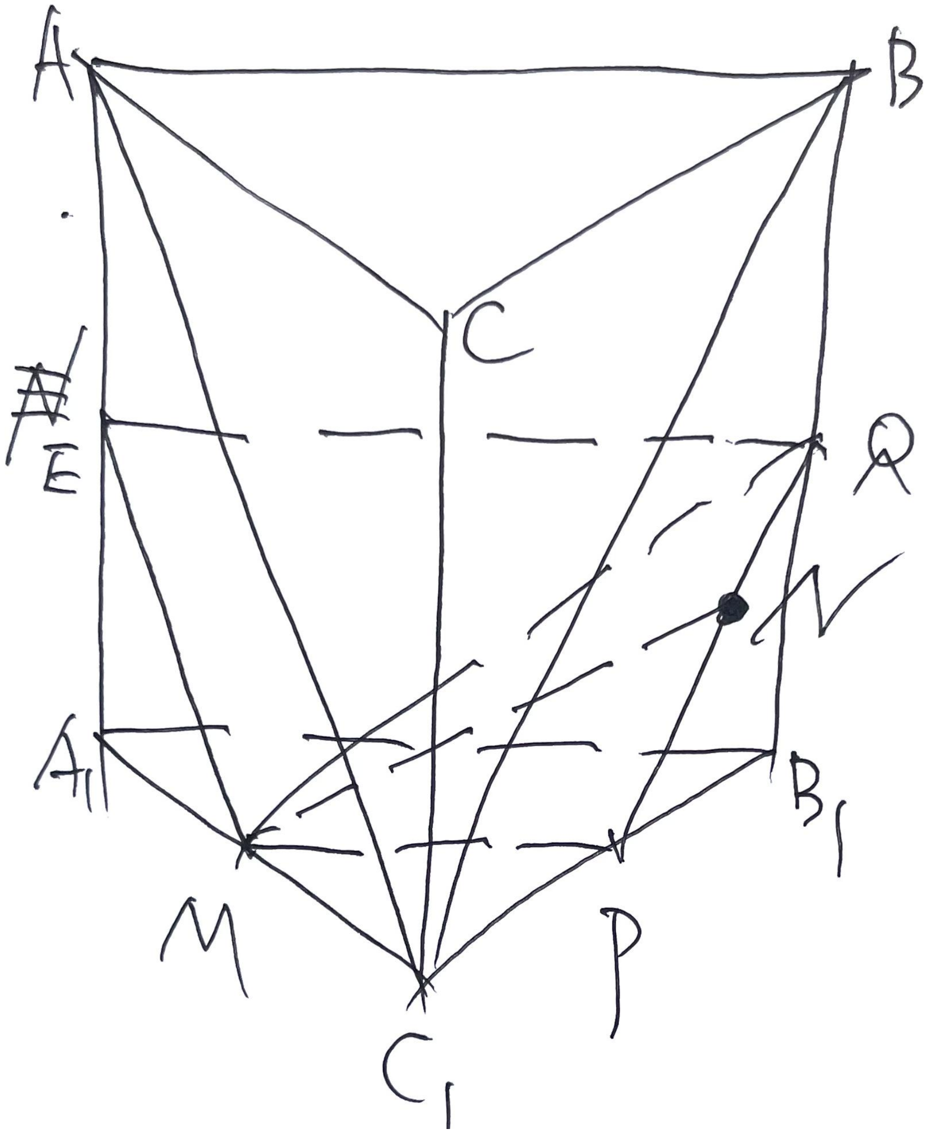


① 点N的轨迹是线段PQ.

② $MN_{max} = MQ = 2\sqrt{2}$

变式1

点N是正三棱柱表面上一点

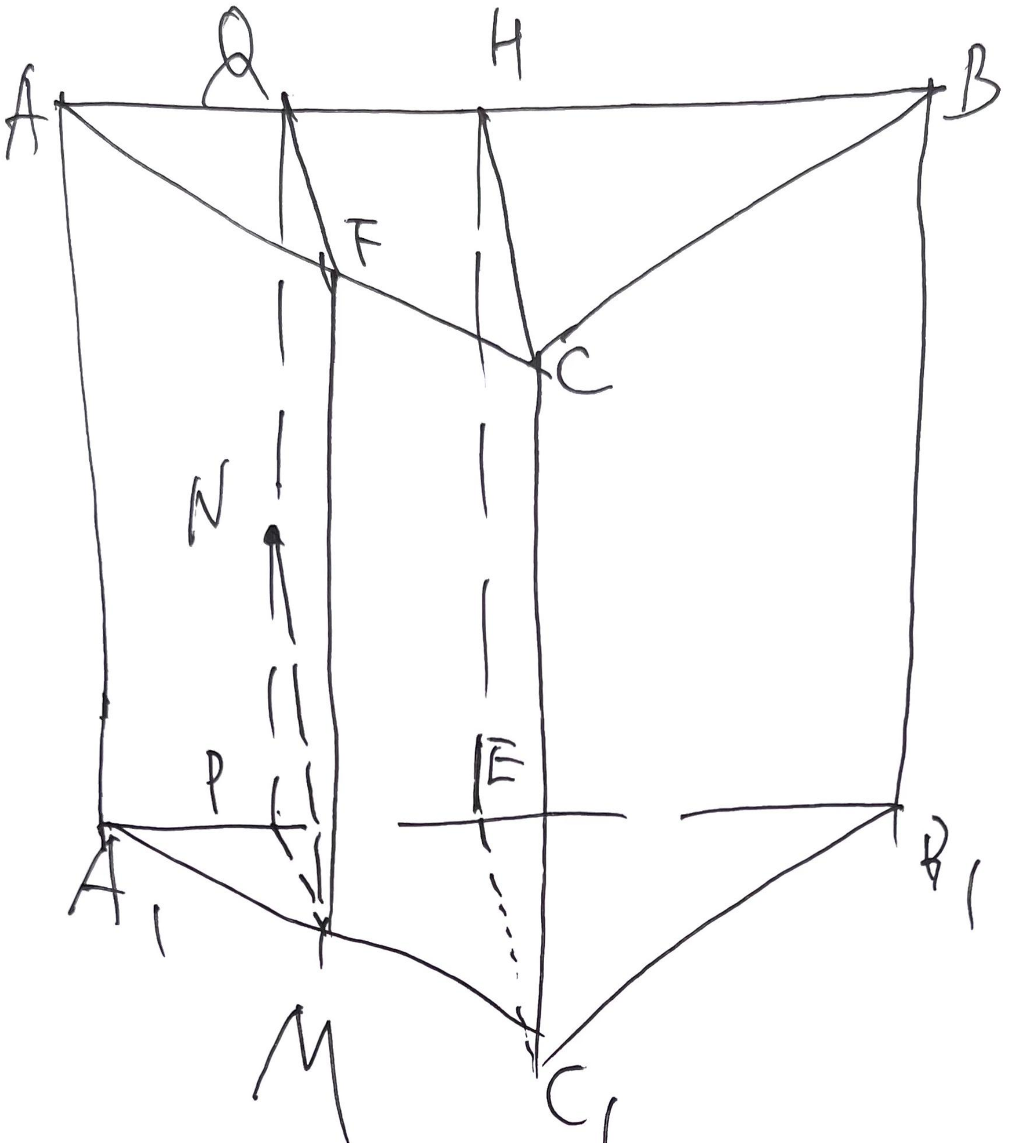


① 点N的轨迹是等腰梯形MPQE(去掉M)

② $MN_{max} = MQ = 2\sqrt{2}$

变式2

点N是正三棱柱上一点，AB⊥MN



① AB⊥平面PQFM.

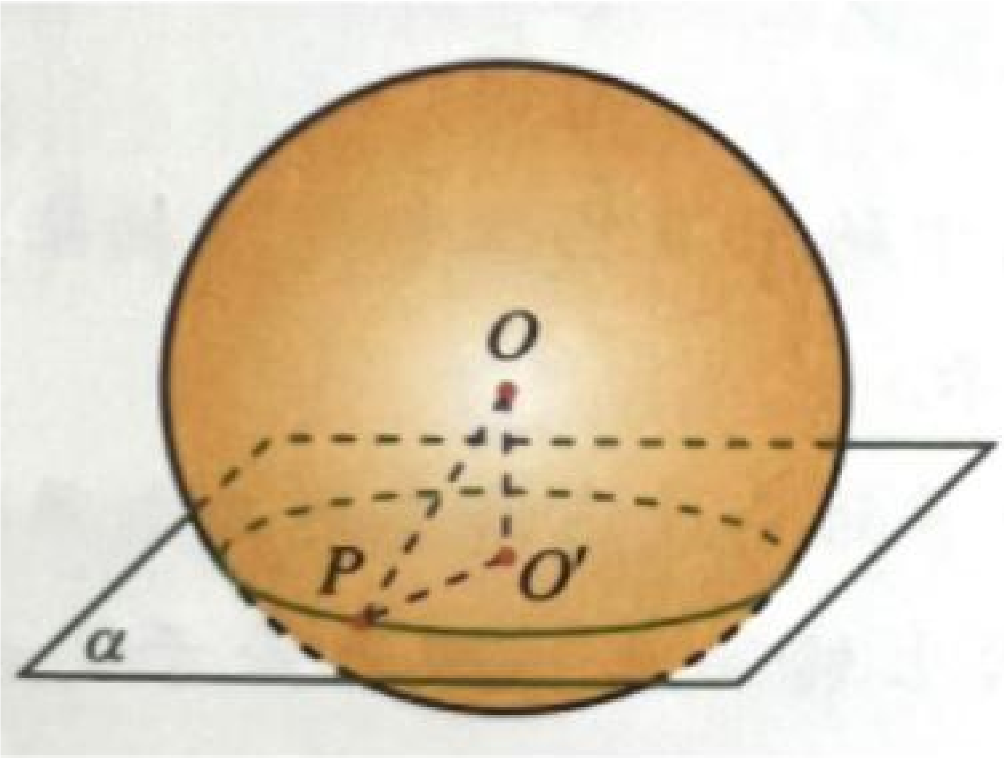
② N的轨迹是四边形(矩形)MPQF.(去掉M)

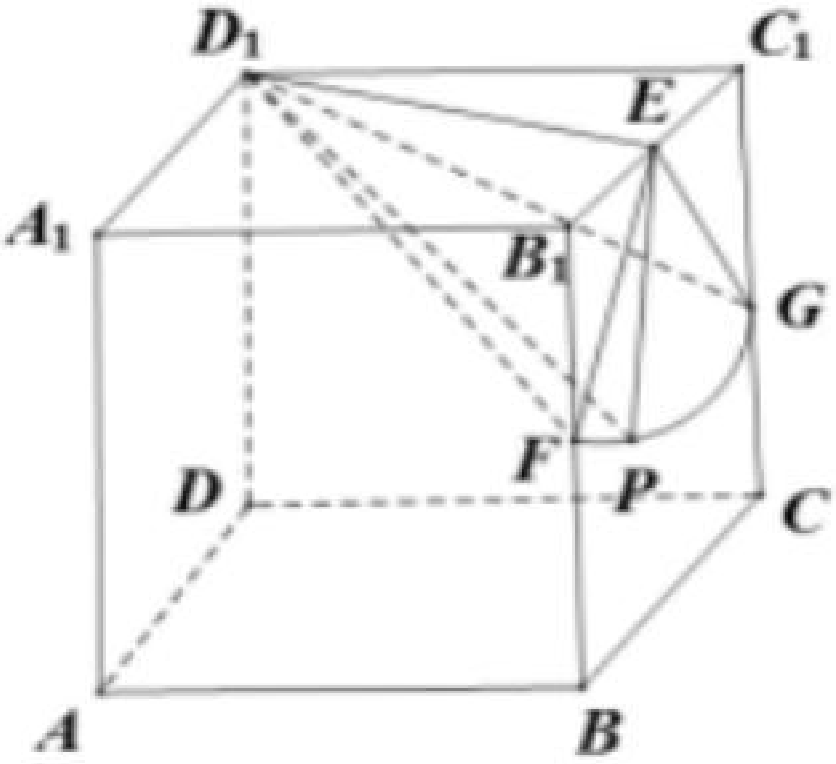
③ $MN_{max}=MQ=\frac{\sqrt{83}}{2}$

二、球面与截面的交线问题：

例 4、(2020 年新高考全国 I 卷(山东)·第 16 题)已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$．以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为________．

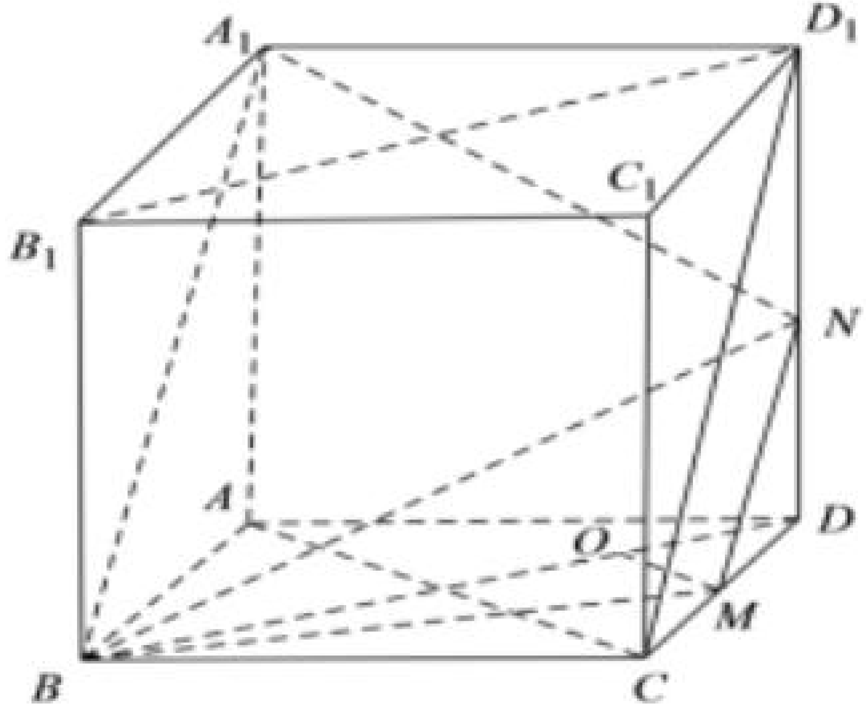
【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$．

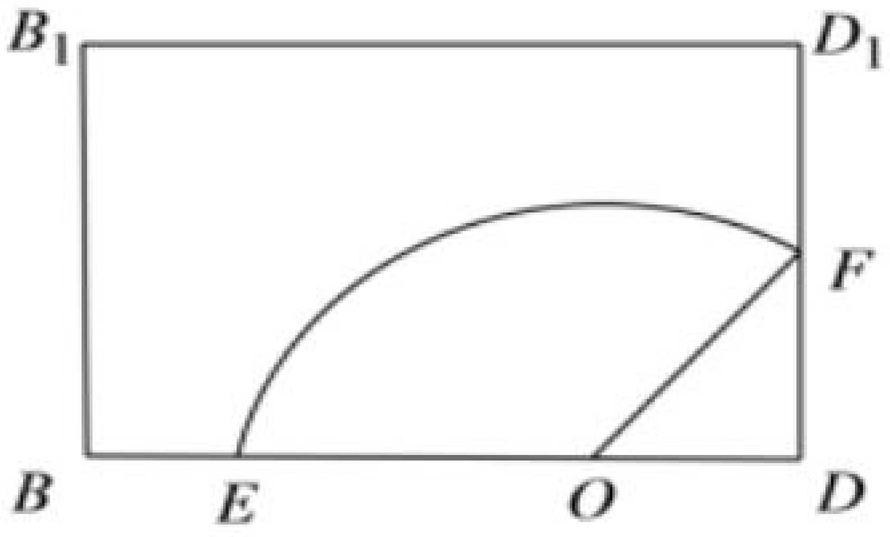




例 5、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为 CD，DD_1 的中点，则平面 BMN 截正方体所得的截面面积为________；以点 M 为球心，$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 为半径的球面与对角面 BB_1D_1D 的交线长度为________

答案：$\frac{9}{2}$；$\frac{3\pi}{4}$．

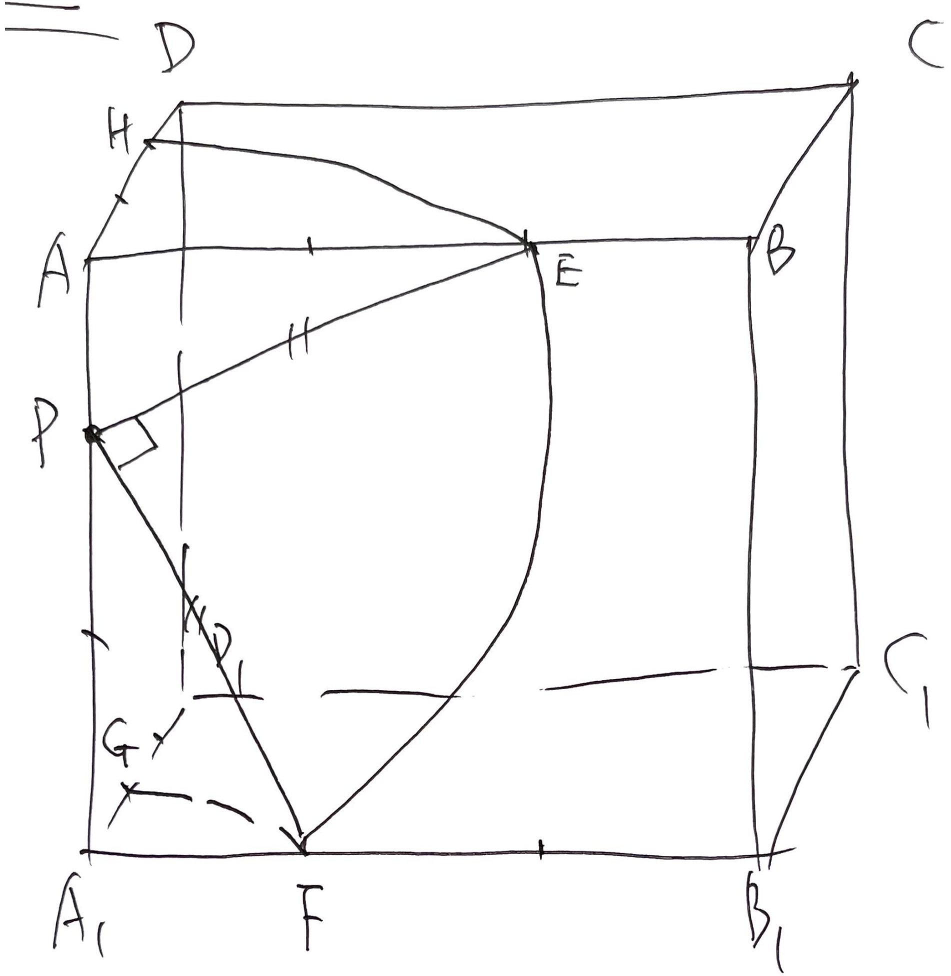




周测三—16

例 6、在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 AA_1 上一点，且 $|AP|=1$，则正方体表面到 P 点距离为 $\sqrt{5}$ 的点的轨迹总长度为__________.

二



① $l=\alpha R$

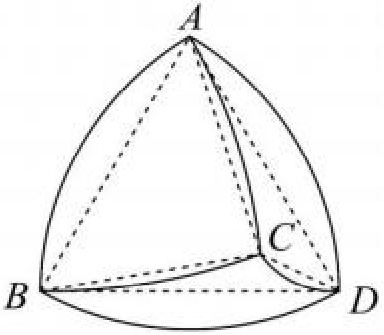
② 轨迹总长度为:

$$2\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt{5}+\frac{\pi}{2}\times1+\frac{\pi}{2}\times2=\left(\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)\pi$$

周测九—11题

例 7、勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，因此它能像球一样来回滚动（如图甲），利用这一原理，科技人员发明了转子发动机．勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体如图乙所示，若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，则下列说法正确的是（　　）

甲



乙

A．勒洛四面体 $ABCD$ 被平面 ABC 截得的截面面积是 $8\left(\pi-\sqrt{3}\right)$

B．勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$

C．勒洛四面体的截面面积的最大值为 $2\pi-2\sqrt{3}$

D．勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

K 高考蓝皮书

BLUE BOOK OF NCEE

高考关键能力培养与训练

（2024）

CULTIVATION AND TRAINING OF KEY ABILITIES IN THE COLLEGE ENTRANCE EXAMINATION（2024）

中国高考报告年鉴系列丛书

中国高考报告年鉴学术委员会 / 编

数学

现代教育出版社 Modern Education Press

本次比赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成，如图 1，已知球的体积为$\frac{4\pi}{3}$，托盘由边长为 4 的正三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠而成，如图 2. 则下列结论正确的是（　　）

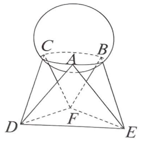


图 1

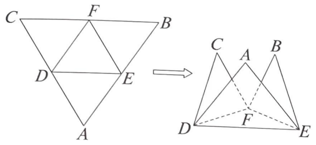


图 2

A. 经过三个顶点 A,B,C 的球的截面圆的面积为$\frac{\pi}{4}$

B. 异面直线 AD 与 CF 所成的角的余弦值为$\frac{5}{8}$

C. 多面体 $ABCDEF$ 的体积为$\frac{9}{4}$

D. 球离球托底面 DEF 的最小距离为$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}-1$

6.（多选）勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，因此它能像球一样来回滚动（如图 1），利用这一原理，科技人员发明了转子发动机. 勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体如图 2 所示，若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，则下列说法正确的是（　　）

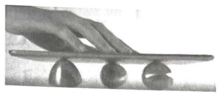


图 1

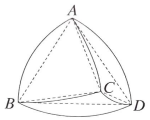


图 2

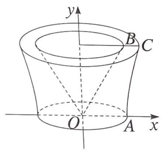
A. 勒洛四面体 $ABCD$ 被平面 ABC 截得的截面面积是 $8(\pi-\sqrt{3})$

B. 勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$

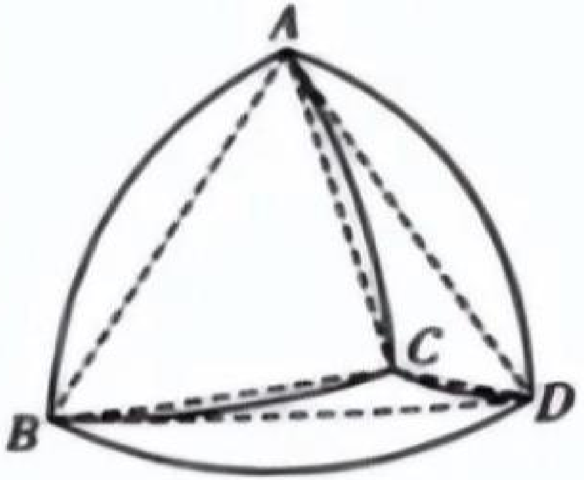
C. 勒洛四面体的截面面积的最大值为 $2\pi-2\sqrt{3}$

D. 勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $2-\frac{\sqrt{6}}{2}$

7.（2023 年江苏徐州期末）早在南北朝时期，祖冲之和他的儿子祖暅在研究几何体的体积时，得到了祖暅原理：幂势既同，则积不容异. 这就是说，夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等. 将双曲线 C_1：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，直线 $y=0$ 与直线 $y=\sqrt{3}$ 所围成的平面图形（含边界）绕 y 轴旋转一周得到如图所示的几何体 Γ，其中线段 OA 为双曲线 C_1 的实半轴，点 B 和点 C 为直线 $y=\sqrt{3}$ 分别与双曲线一条渐近线及右支的交点，则线段 BC 绕 y 轴旋转一周所得的



类似题



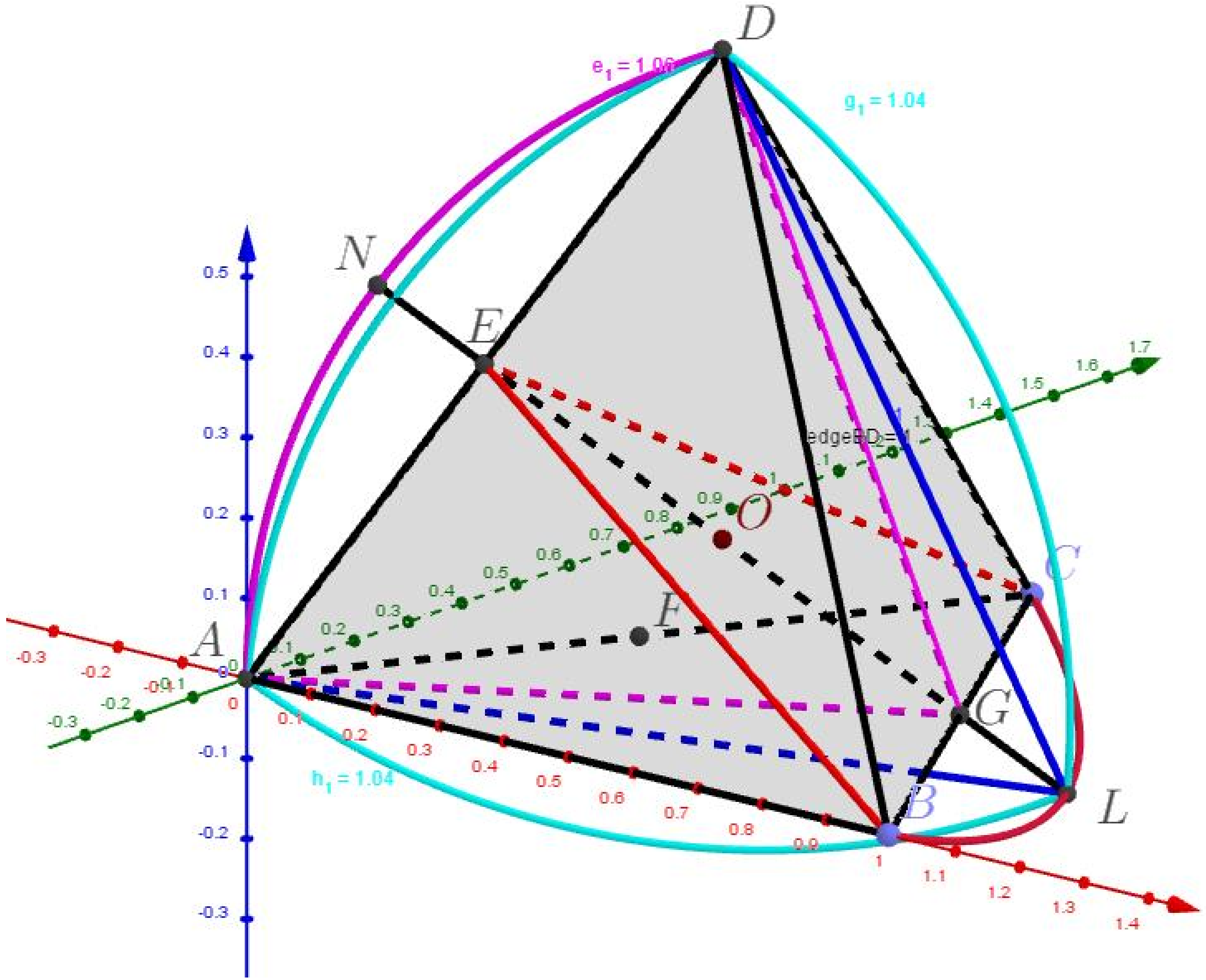
勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，因此它能像球一样来回滚动.勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分，如图所示，若正四面体$ABCD$的棱长为4，则（ ）A.勒洛四面体最大的截面是正三角形

B.勒洛四面体表面上任意两点间的距离的最大值为4

C.勒洛四面体四个曲面所有交线长的和为8π

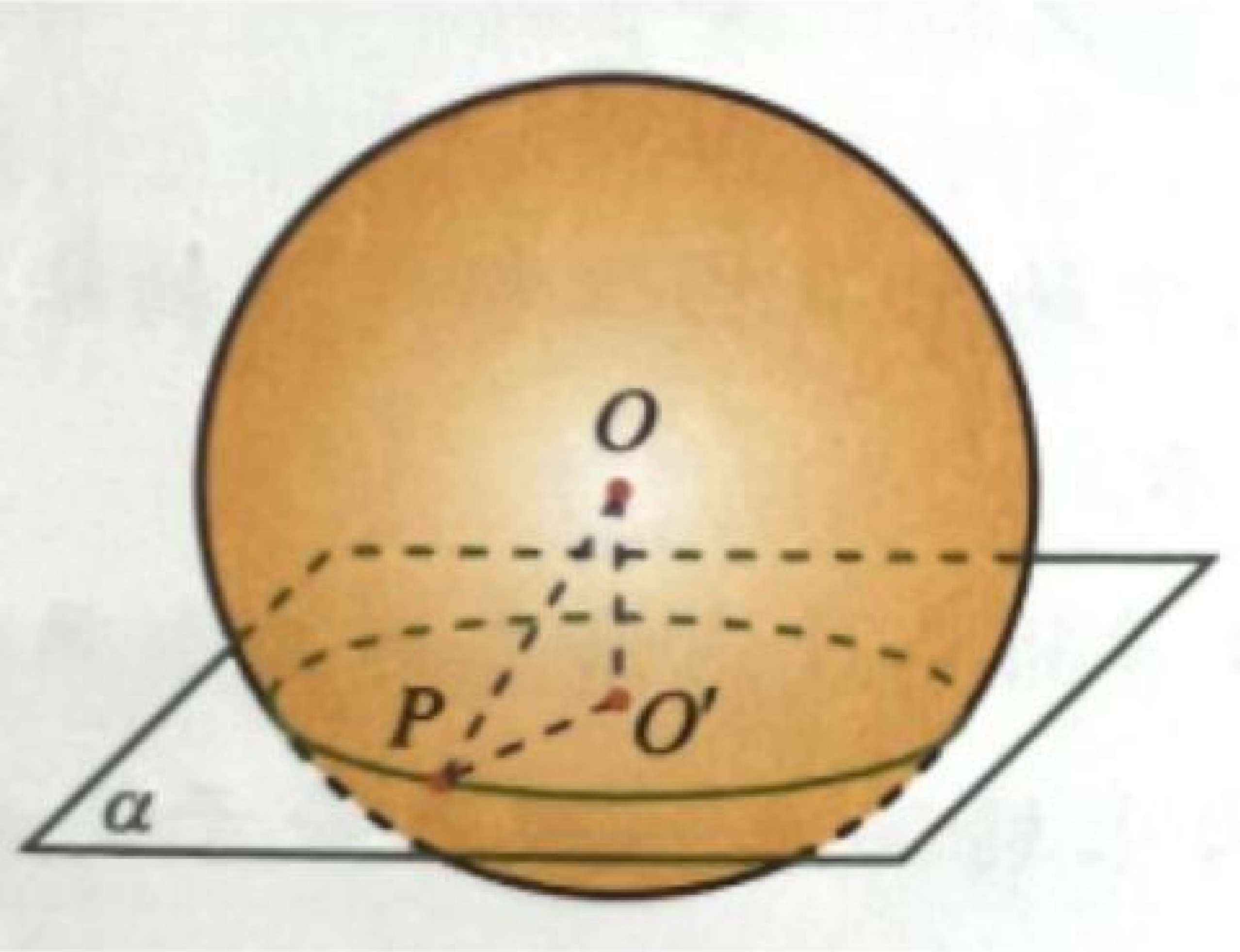
D.勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为$4-\sqrt{3}$

geogebra与数学深度融合

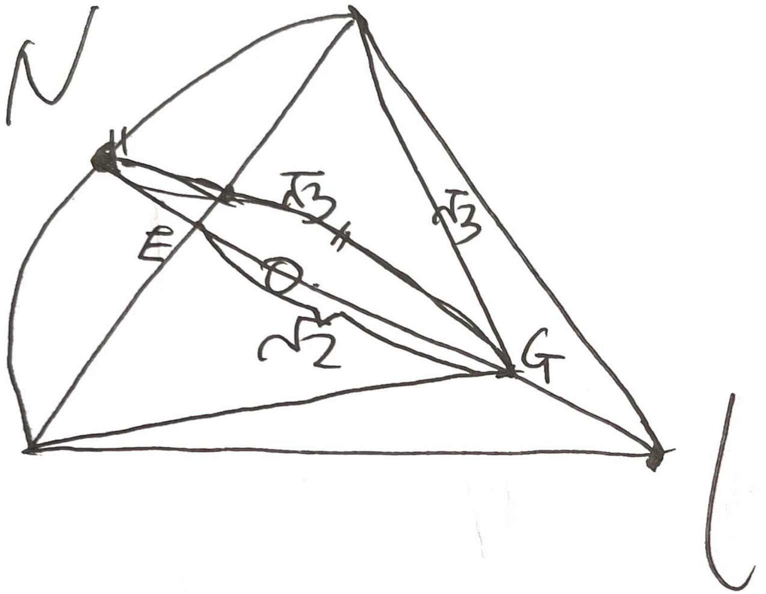


演示

它的本质，又回归到这个高考题上来

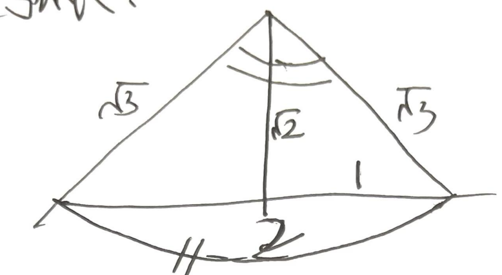


☆ 任意两点最大距离



$NL = \sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2} = 2\sqrt{3}-\sqrt{2} > 2$

☆单弧长：



$$\because \cos\theta=\frac{3+3-4}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \theta=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

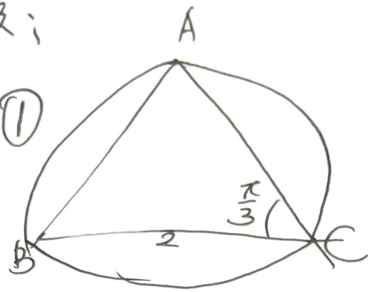
$$l=\overset{\frown}{AD}=\sqrt{3}\cdot\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{弓形}=\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\cdot\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}$$

$$=\frac{3}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}$$

最大面积：

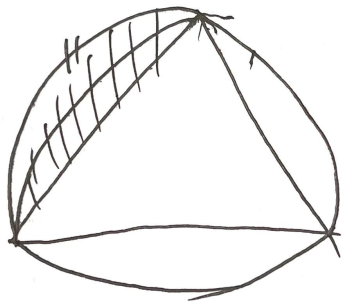
C(选项)：①



$$S=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times4-\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)3+\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\pi-2\sqrt{3}$$

②



$$S=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times4-\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times2+\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}$$

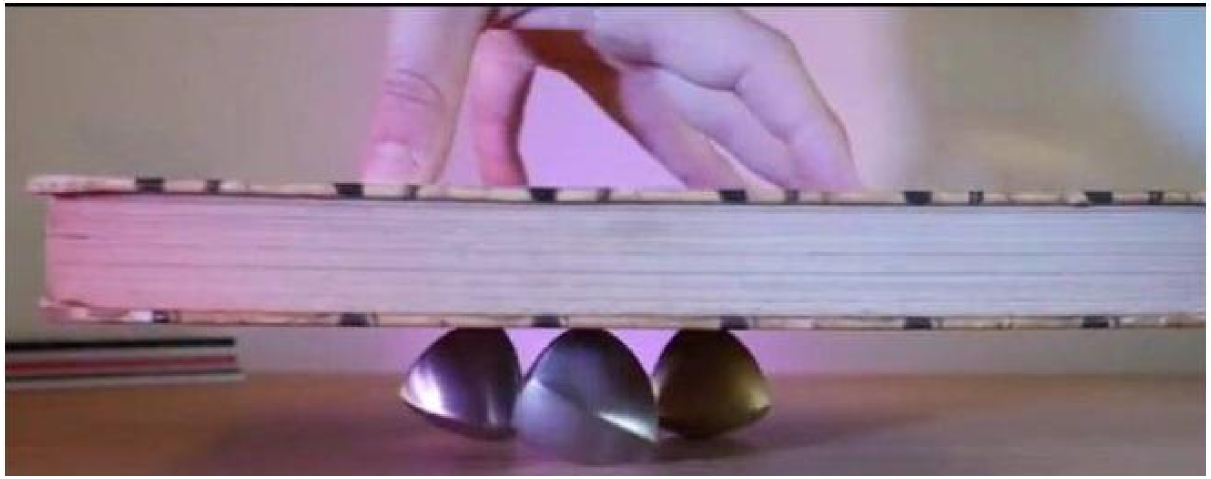
$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}$$

由勒洛三角形构成额三维立体结构改良后可以得到迈斯纳四面体，将书本放在迈斯纳四面体上移动书本，书本可以平滑额移动，不会出现颠簸感，和在普通的圆球移动差不多，把水放在迈斯纳四面体上，水杯可以平稳的移动，杯子里的水也不会洒出。

勒洛四面体？

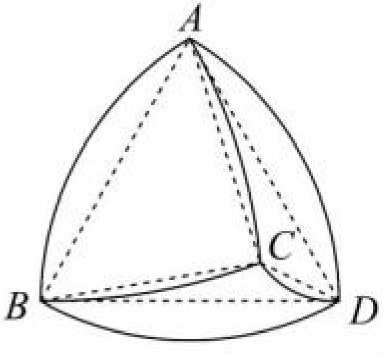
改良

迈斯纳四面体



例 7、 勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，因此它能像球一样来回滚动（如图甲），利用这一原理，科技人员发明了转子发动机．勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体如图乙所示，若正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，则下列说法正确的是（　　）

甲



乙

A．勒洛四面体 $ABCD$ 被平面 ABC 截得的截面面积是 $8\left(\pi-\sqrt{3}\right)$

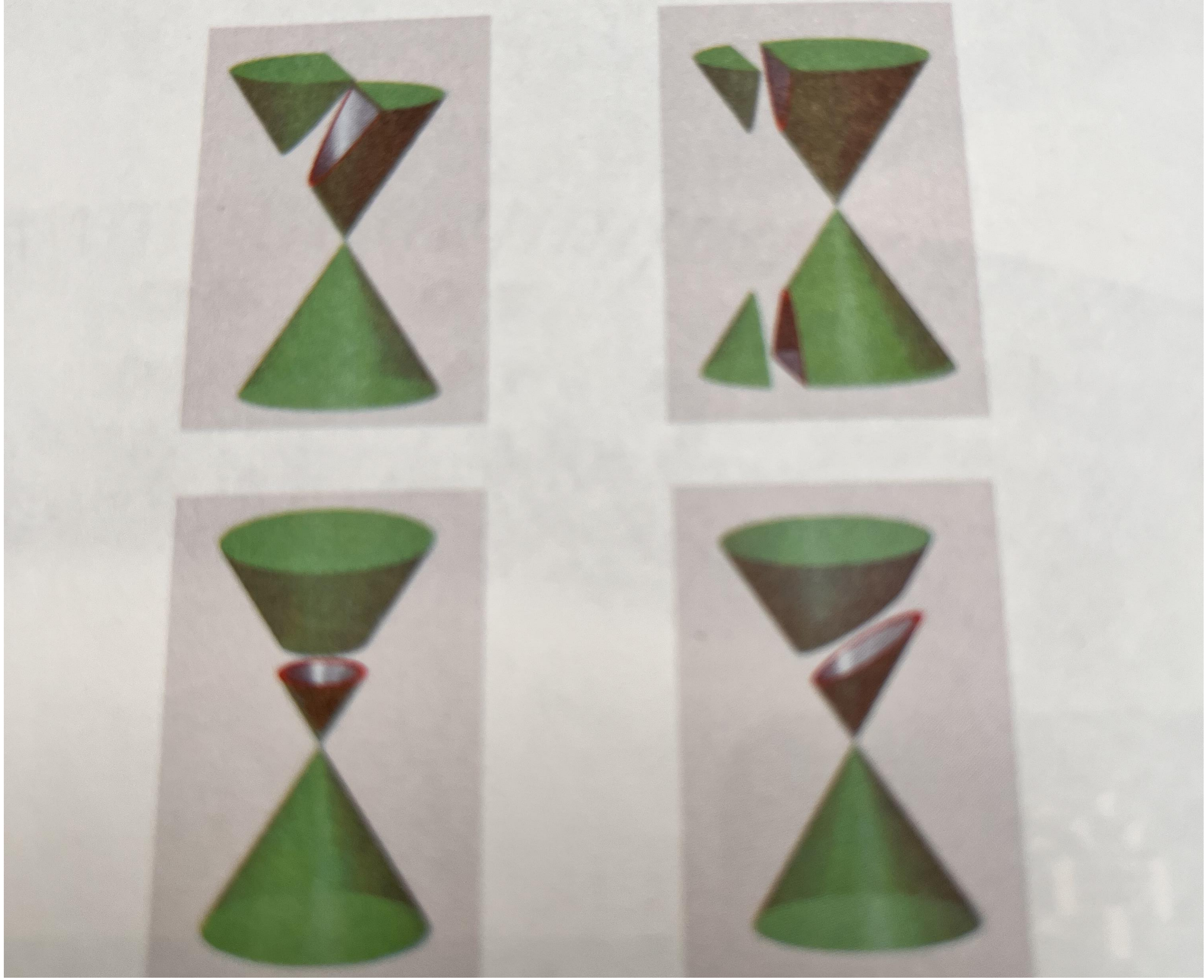
B．勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$

C．勒洛四面体的截面面积的最大值为 $2\pi-2\sqrt{3}$

D．勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

三、圆锥与截面的交线问题

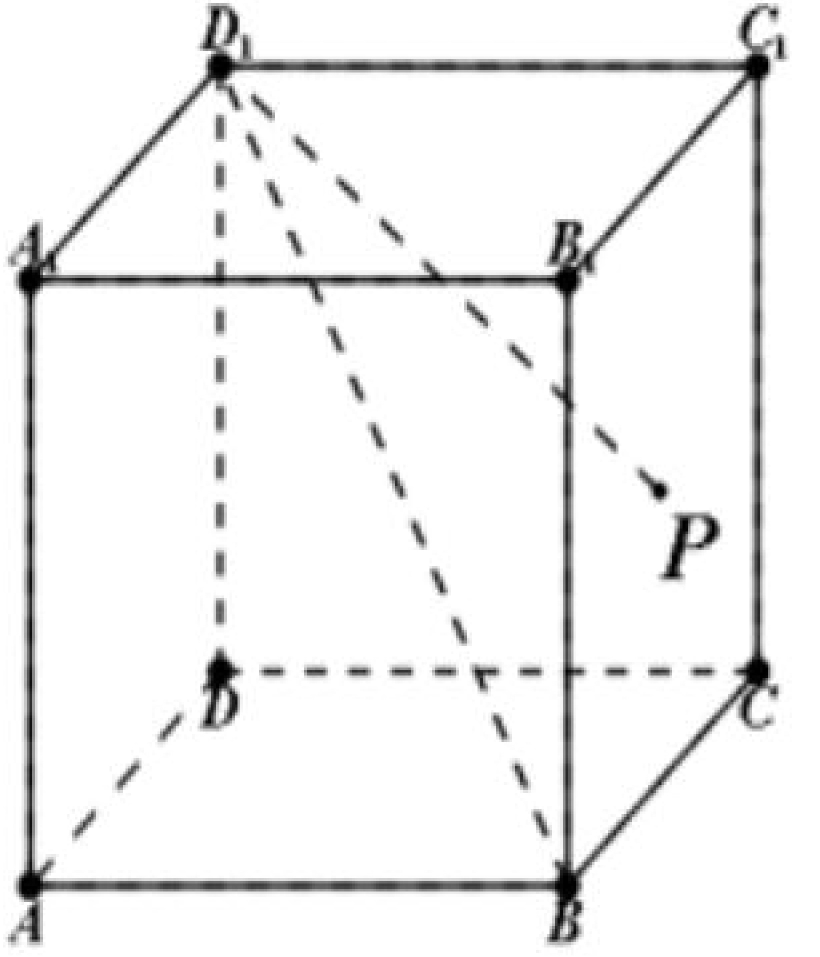
圆锥曲线

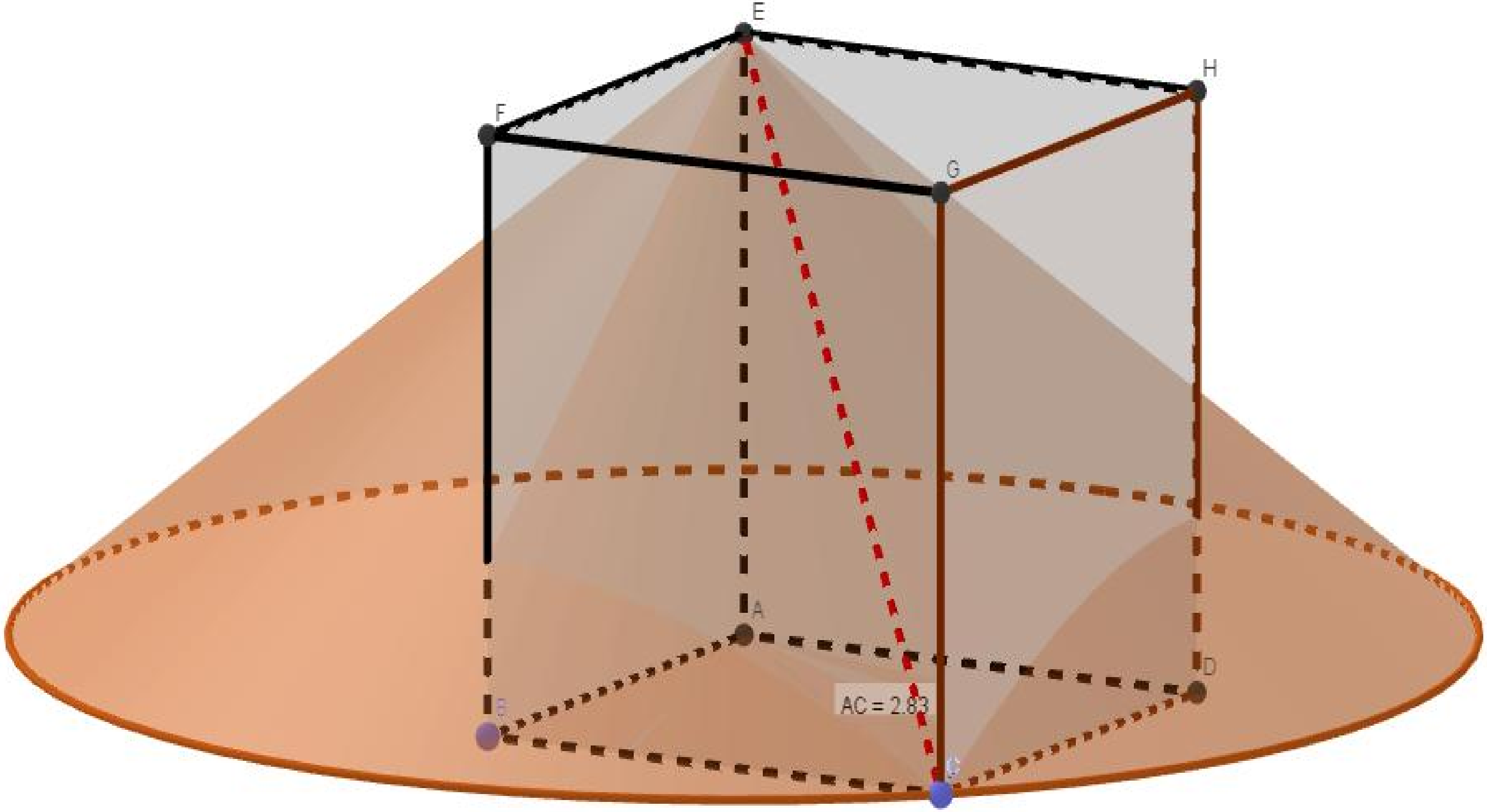


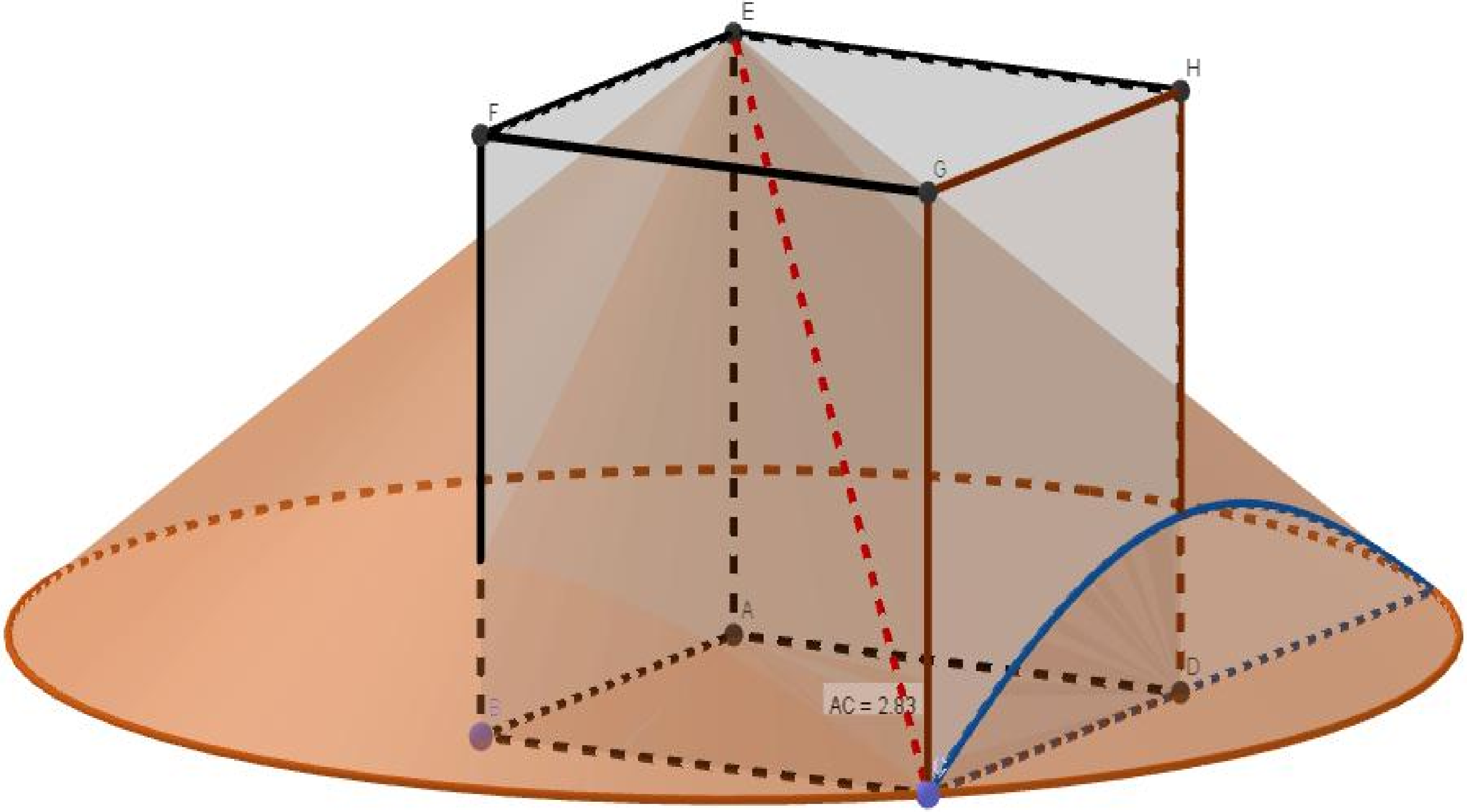
例 8、已知点 P 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的侧面BB_1C_1C中，且满足$\angle PD_1D=\angle BD_1D$，则动点 P 轨迹所在曲线为(　　)

A.圆　　　B.椭圆

C.双曲线　　D.抛物线

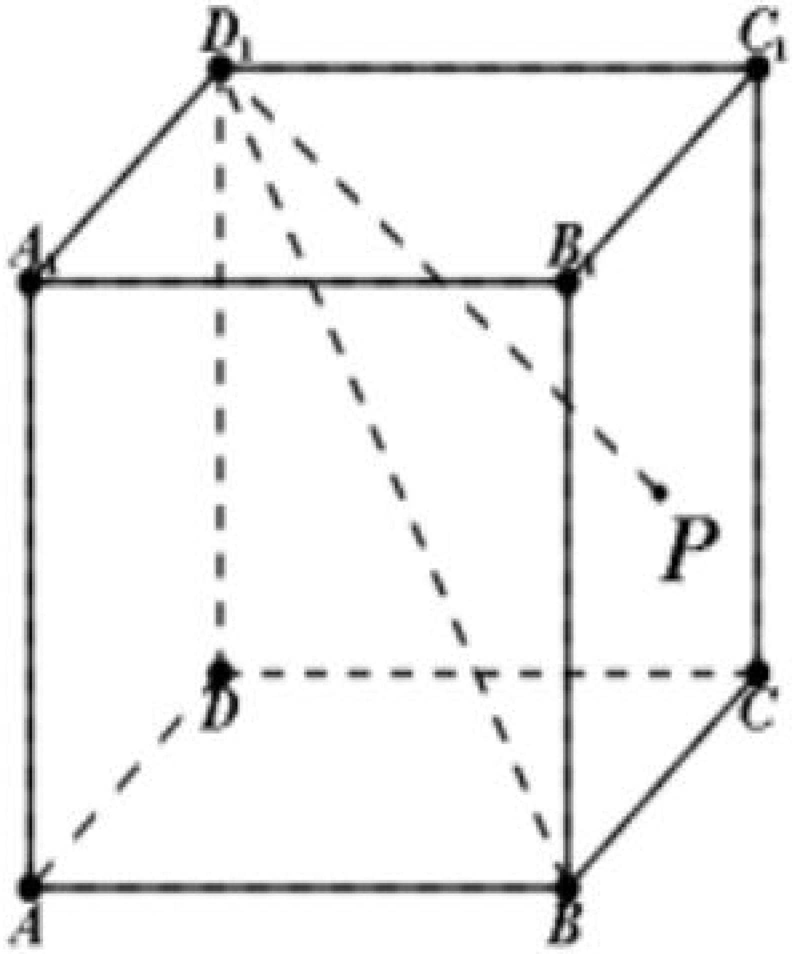



E
H
F
G
A
D
AC = 2.83
B



E
H
F
G
A
D
B
AC = 2.83

例 8、已知点 P 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的侧面BB_1C_1C中，且满足$\angle PD_1D=\angle BD_1D$，则动点 P 轨迹所在曲线为(C)

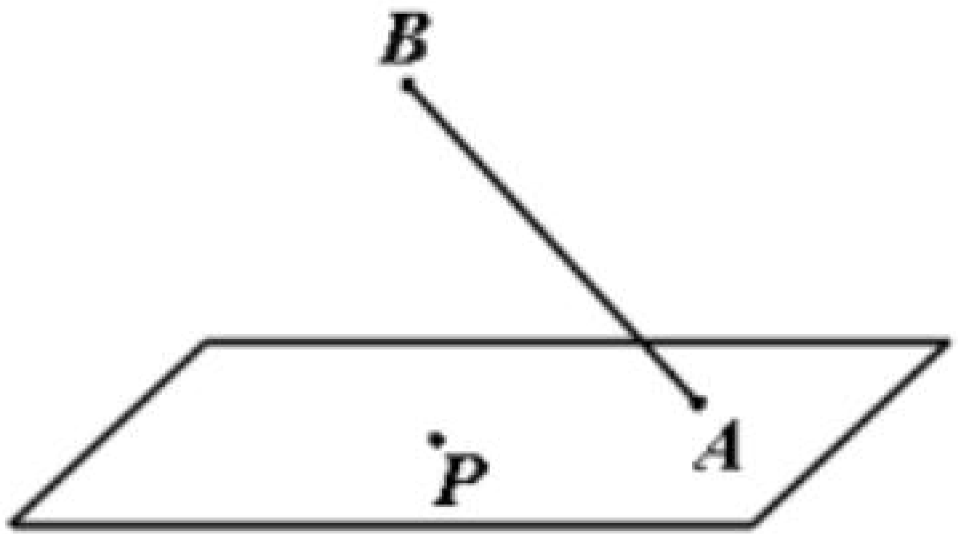


A.圆　　B.椭圆

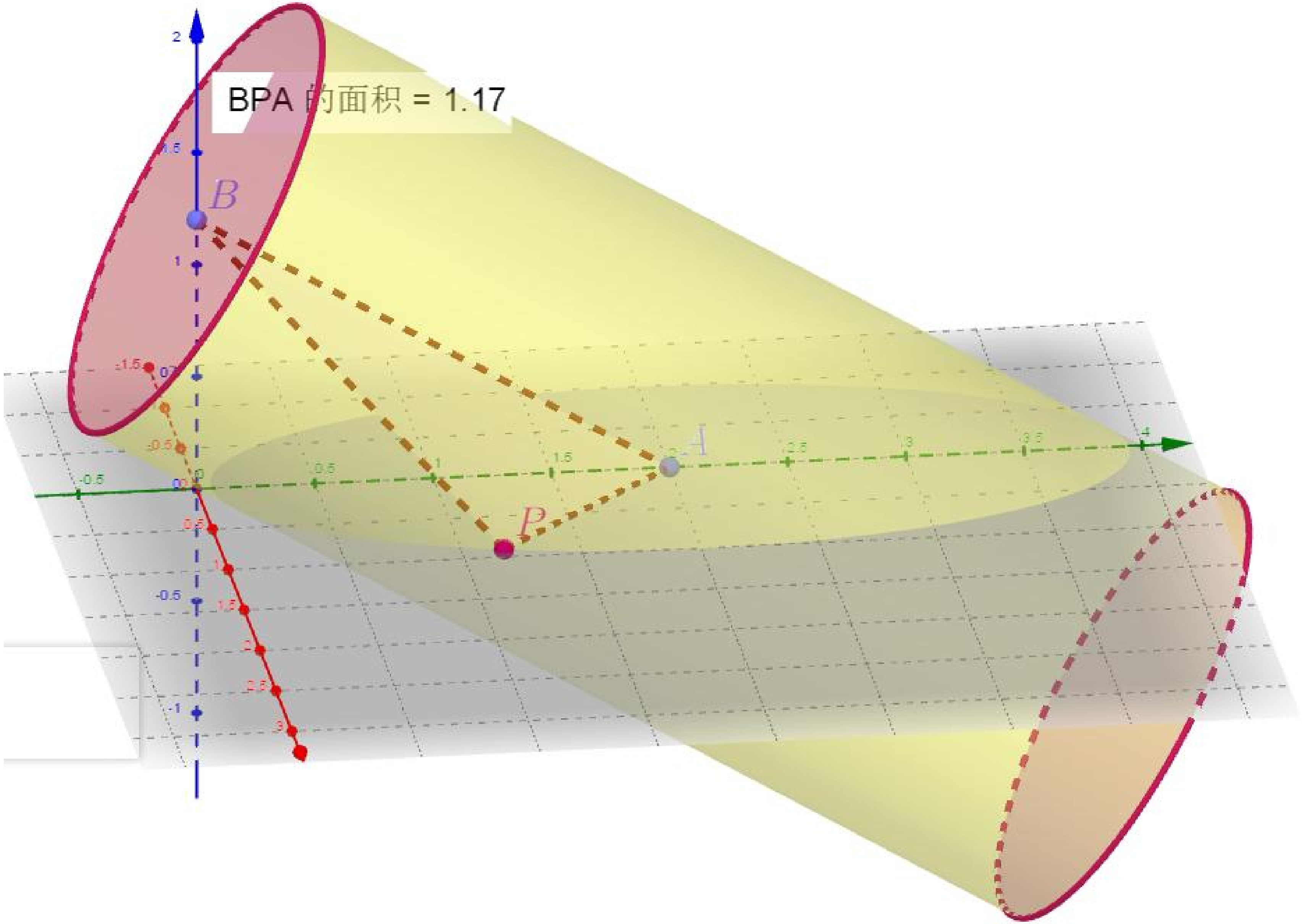
C.双曲线　　D.抛物线

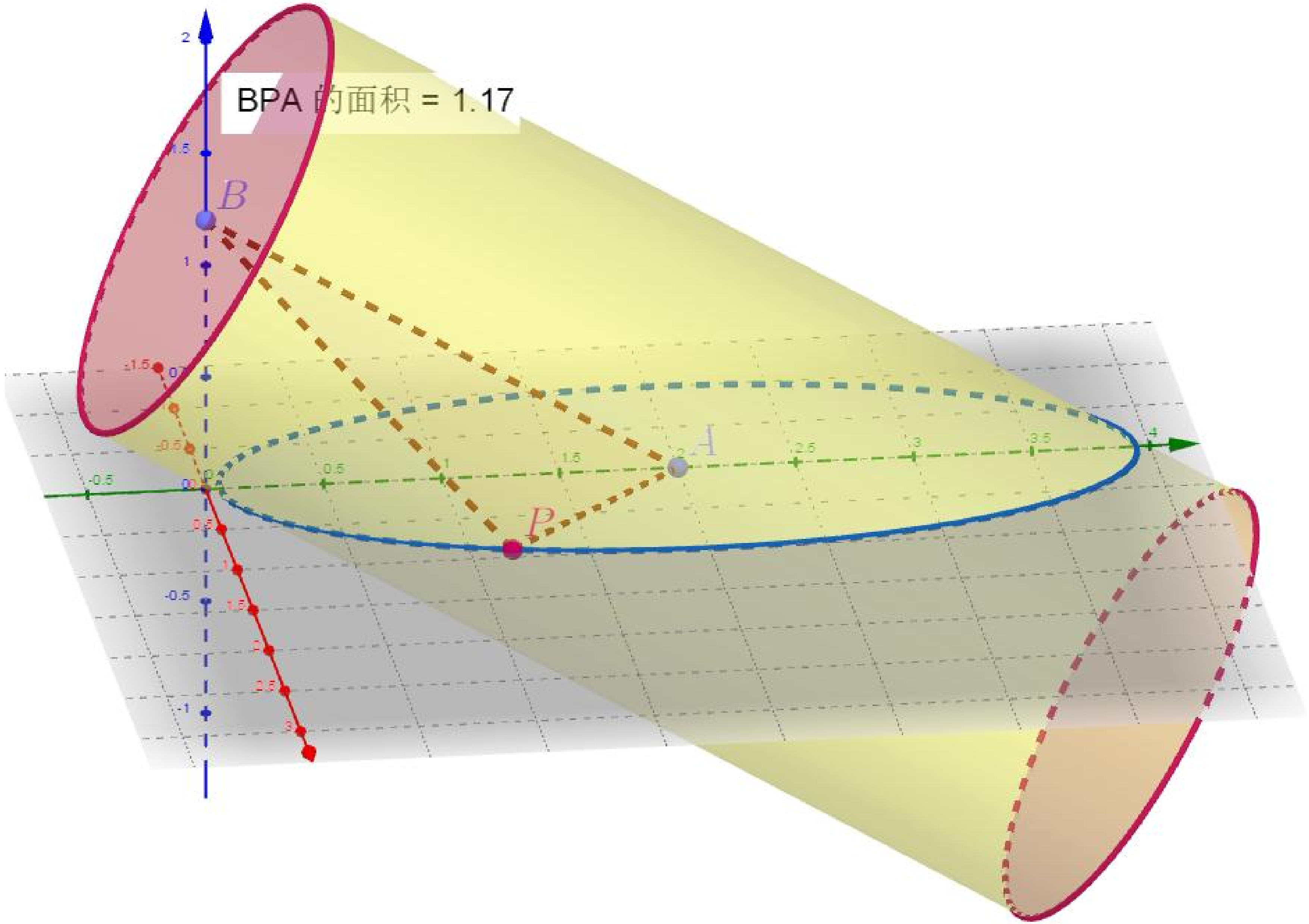
2008浙江，理科10

例9. 点AB是平面α的斜线段，点A为斜足，若点P在平面α内运动，且ΔABP的面积为定值，则动点P的轨迹为（　）



A.圆　　B.椭圆　　C.一条直线　　D.两条平行线

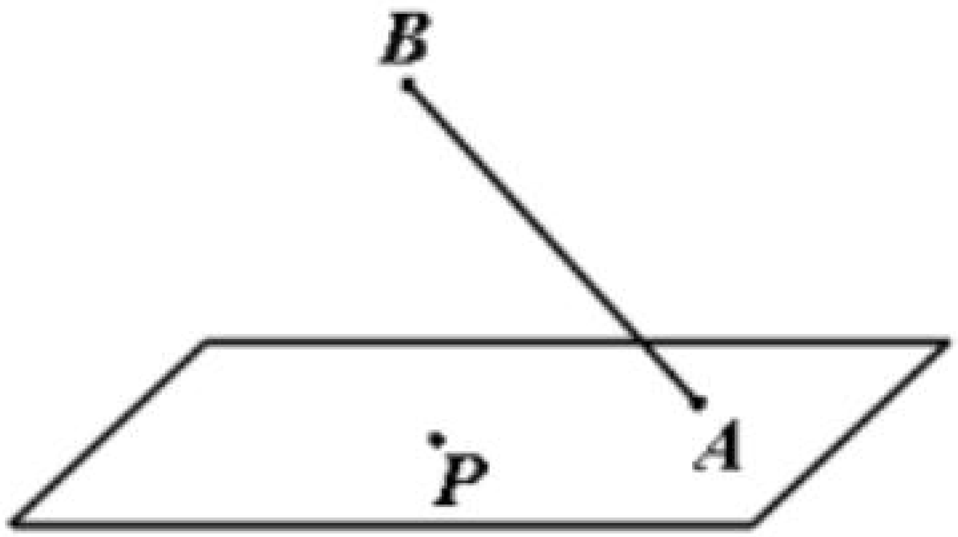

BPA 的面积 = 1.17
B
A
P



BPA 的面积 = 1.17
B
A
P

2008浙江，理科10

例9、点AB是平面α的斜线段，点A为斜足，若点P在平面α内运动，且ΔABP的面积为定值，则动点P的轨迹为（B）



A.圆　　B.椭圆　　C.一条直线　　D.两条平行线

几点思考：

1、例题、习题的选择与变式

2、关于高考真题的研究

（1）全国卷　　（2）其他省份的，北京、天津、江苏、浙江等

3、打好基础，构建完整的知识与方法的体系

4、强化计算能力，树立满分意识

5、近几年高考题，思维灵活，命题新颖。

平时要对学生进行针对性的训练，鼓励学生动脑和动手

6、处理好，上课即时生成的有价值的问题；譬如：学生无法突破的思维障碍，或者计算容易出问题的关键步骤的展开等

7、学无止境，学习一直在路上；继续学习，继续进步

8、集体的力量是巨大的，集体智慧碰撞出的火花是璀璨的