

第一章 集合、常用逻辑用语与不等式

一、普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）：

主题一 预备知识

以义务教育阶段数学课程内容为载体，结合集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式等内容的学习，为高中数学课程做好学习心理、学习方式和知识技能等方面的准备，帮助学生完成初高中数学学习的过渡。

【内容要求】

内容包括：集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式。

1. 集合

在高中数学课程中，集合是刻画一类事物的语言和工具。本单元的学习，可以帮助学生使用集合的语言简洁、准确地表述数学的研究对象，学会用数学的语言表达和交流，积累数学抽象的经验。

内容包括：集合的概念与表示、集合的基本关系、集合的基本运算。

(1) 集合的概念与表示

①通过实例，了解集合的含义，理解元素与集合的属于关系。

②针对具体问题，能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合。

③在具体情境中，了解全集与空集的含义。

(2) 集合的基本关系

理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。

(3) 集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义，能求两个集合的并集与交集。

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集。

③能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算，体会图形对理解抽象概念的作用。

2. 常用逻辑用语

常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具，是逻辑思维的基本语言。本单元的学习，可以帮助学生使用常用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理，体会常用逻辑用语在表述数学内容和论证数学结论中的作用，提高交流的严谨性与准确性。

内容包括：必要条件、充分条件、充要条件，全称量词与存在量词，全称量词命题与存在量词命题的否定。

(1) 必要条件、充分条件、充要条件

①通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系。

②通过对典型数学命题的梳理，理解充分条件的意义，理解判定定理与充分条件的关系。

③通过对典型数学命题的梳理，理解充要条件的意义，理解数学定义与充要条件的关系。

(2) 全称量词与存在量词

通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义。

(3) 全称量词命题与存在量词命题的否定

①能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定。

②能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定。

3. 相等关系与不等关系

相等关系、不等关系是数学中最基本的数量关系，是构建方程、不等式的基础。本单元的学习，可以帮助学生通过类比，理解等式和不等式的共性与差异，掌握基本不等式。

内容包括：等式与不等式的性质、基本不等式。

(1) 等式与不等式的性质

梳理等式的性质，理解不等式的概念，掌握不等式的性质。

(2) 基本不等式

掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$)。结合具体实例，能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题。

4. 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

用函数理解方程和不等式是数学的基本思想方法。本单元的学习，可以帮助学生用一元二次函数认识一元二次方程和一元二次不等式。通过梳理初中数学的相关内容，理解函数、方程和不等式之间的联系，体会数学的整体性。

内容包括：从函数观点看一元二次方程、从函数观点看一元二次不等式。

(1) 从函数观点看一元二次方程

会结合一元二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数，了解函数的零点与方程根的关系。

(2) 从函数观点看一元二次不等式

①经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义。能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集。

②借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系（参见案例1）。

【教学提示】

初中阶段数学知识相对具体，高中阶段数学知识相对抽象。教师应针对这一特征帮助学生完成从初中到高中数学学习的过渡，包括知识与技能、方法与习惯、能力与态度等方面。

在集合、常用逻辑用语的教学中，教师应创设合适的教学情境，以义务教育阶段学过的数学内容为载体，引导学生用集合语言和常用逻辑用语梳理、表达学过的相应数学内容。应引导学生理解属于关系是集合的基本关系，了解元素 A 与由元素 A 组成的集合 $\{A\}$ 的差异，即 $A \in \{A\}$ ， A 与 $\{A\}$ 不相同。在梳理过程中，可以针对学生的实际布置不同的任务，采用自主学习与合作学习相结合的方式组织教学活动。

在相等关系与不等关系的教学中，应引导学生通过类比学过的等式与不等式的性质，进一步探索等式与不等式的共性与差异。

在从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式的教学中，可以先以讨论具体的一元二次函数变化情况为情境，引导学生发现一元二次函数与一元二次方程的关系，引出一元二次不等式概念；然后进一步引导学生探索一般的一元二次函数与一元二次方程、一元二次不等式的关系，归纳总结出用一元二次函数解一元二次不等式的程序。

教学中，要根据内容的定位和教育价值，关注数学学科核心素养的培养。要让学生逐渐养成借助直观理解概念、进行逻辑推理的思维习惯，以及独立思考、合作交流的学习习惯，引导学生感悟高中阶段数学课程的特征，适应高中阶段的数学学习。

【学业要求】

能够在现实情境或数学情境中，概括出数学对象的一般特征，并用集合语言予以表达。初步学会用三种语言（自然语言、图形语言、符号语言）表达数学研究对象，并能进行转换。掌握集合的基本关系与基本运算。

能够借助常用逻辑用语进行数学表达、论证和交流，体会常用逻辑用语在数学中的作用。

能够从函数观点认识方程和不等式，感悟数学知识之间的关联，认识函数的重要性。掌握等式与不等式的性质。

重点提升数学抽象、逻辑推理和数学运算素养。

案例 1 借助一元二次函数，求解一元二次不等式

【目的】学习用函数统一理解初中学过的函数、方程与不等式的联系，逐渐学会利用函数解决相关的数学问题，体会数学内容之间的联系，提升直观想象与数学运算素养。

【情境】基于不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ ，给出相应函数图象，分析求解的程序。

【分析】以下在实数范围内进行讨论。当一个问题有不同的解决方法时，需要对这些方法进行分析、比较，选择能够体现数学本质的、适用范围更广的方法。

求解一元二次不等式通常有两种基本方法。一种是代数方法，先对二次三项式进行因式分解，把一元二次不等式转化为一元一次不等式组，通过求解一元一次不等式组，得到一元二次不等式的解集；另一种是函数方法，借助一元二次函数图象的直观，得到求解一元二次不等式的通性通法。后者是一种程序思想方法，具体分析如下。

对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ ，根据系数的不同，一元

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系可以分为六类，如图 1 所示。用函数方法求解的程序为：通过系数 a 的符号，判定函数图象开口方向；通过一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式 b^2-4ac ，判定函数图象与 x 轴的位置关系；通过计算方程的根得到不等式的解集。

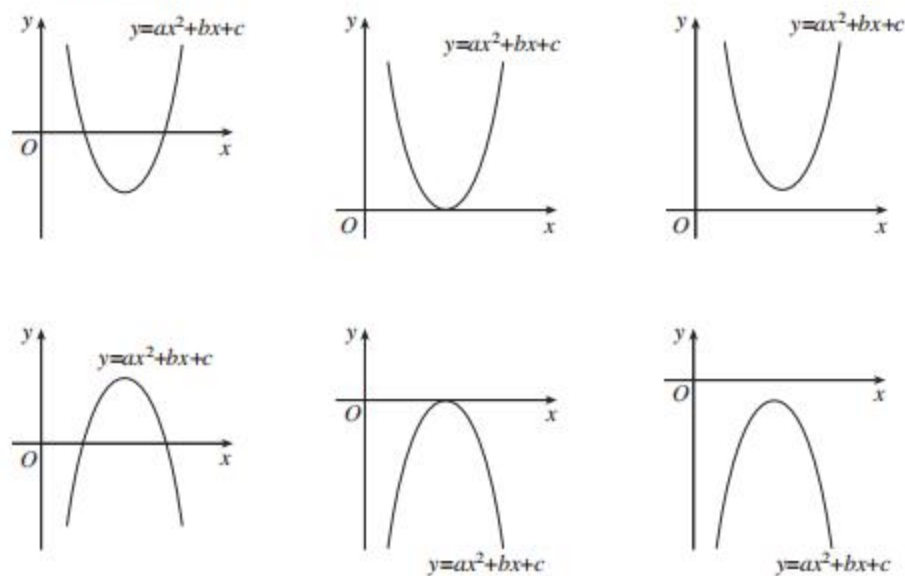


图 1 六类一元二次函数图象

上述两种方法的共性是都与一元二次方程的根有关，差异是函数方法考虑了函数的变化规律。因此，函数方法是具有一般性的，特别是，类比上述函数方法的思维过程，还可以讨论其他类型函数的相关求解问题。

二、四年新高考试试题（2020-2023年真题、2021年八省联考、2023年四省联考）：

单元	知识要点	新高考全国卷	非新高考全国卷
1. 集合	集合的概念与表示		2020 卷Ⅲ/理 1
	集合的基本关系	2023 新课标卷Ⅱ/1	
	集合的基本运算	2020 新高考卷Ⅰ/1, 2020 新高考卷Ⅰ/5, 2021 新高考卷Ⅰ/1, 2021 新高考卷Ⅱ/2, 2022 新高考卷Ⅰ/1, 2022 新高考卷Ⅱ/1, 2023 新课标卷Ⅰ/1, 2021 八省联考/1, 2023 四省联考/2	2020 卷Ⅰ/文 1,2020 卷Ⅰ/理 2, 2020 卷Ⅱ/文 1,2020 卷Ⅱ/理 1, 2020 卷Ⅲ/文 1,2021 甲卷/文 1, 2021 甲卷/理 1,2021 乙卷/文 1, 2021 乙卷/理 2,2022 甲卷/文 1, 2022 甲卷/理 3,2022 乙卷/文 1, 2022 乙卷/理 1,2023 甲卷/文 1, 2023 乙卷/文 2,2023 乙卷/理 2, 2023 甲卷/理 1
2. 常用逻辑用语	必要条件、充分条件、充要条件		
	全称量词与存在量词		2021 乙卷/文理 3
	全称量词命题与存在量词命题的否定	2021 八省联考/3	
3. 相等关系与不等关系	等式与不等式的性质		2020 卷Ⅱ/理 3
	基本不等式	2020 新高考卷Ⅰ/11, 2022 新高考卷Ⅱ/12	2023 乙卷/文 11
4. 用函数观点看一元二次方程与不等式	用函数观点看一元二次方程		
	用函数观点看一元二次不等式		

2020全国新高考 I 卷, 11

11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$

C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$

D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

根据 $a + b = 1$, 结合基本不等式及二次函数知识进行求解.

【详解】对于 A, $a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 A 正确;

对于 B, $a - b = 2a - 1 > -1$, 所以 $2^{a-b} > 2^{-1} = \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 不正确;

对于 D, 因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$,

所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 正确;

故选: ABD

【点睛】本题主要考查不等式的性质, 综合了基本不等式, 指数函数及对数函数的单调性, 侧重考查数学运算的核心素养.

2022全国新高考II卷, 12

12. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

A. $x + y \leq 1$

B. $x + y \geq -2$

C. $x^2 + y^2 \leq 2$

D. $x^2 + y^2 \geq 1$

解析 BC.

设 $x + y = 2m$, $x - y = 2n$, 则

$$x + y = 2m, \quad x^2 + y^2 = 2(m^2 + n^2), \quad xy = m^2 - n^2,$$

其中

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \iff 2(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 1 \iff m^2 + 3n^2 = 1.$$

由于 m 的取值范围是 $[-1, 1]$, 因此 $x + y = 2m$ 的取值范围是 $[-2, 2]$, 选项 \boxed{A} 错误, 选项 \boxed{B} 正确;

由于

$$x^2 + y^2 = 2m^2 + 2n^2 = \frac{2}{3}(m^2 + 3n^2) + \frac{4}{3}m^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}m^2,$$

因此 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$, 选项 \boxed{C} 正确, 选项 \boxed{D} 错误.

综上所述, 正确的选项是 $\boxed{B} \boxed{C}$.

2023全国乙卷, 文11

11. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, 则 $x - y$ 的最大值是 ()

A. $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. 4

C. $1 + 3\sqrt{2}$

D. 7

解析 无.

设 $x - y = t$, 则 $y = x - t$, 从而

$$2x^2 - (2t + 6)x + t^2 + 2t - 4 = 0,$$

视其为关于 x 的二次方程, 有

$$\Delta = (2t + 6)^2 - 8(t^2 + 2t - 4) \geq 0 \iff 1 - 3\sqrt{2} \leq t \leq 1 + 3\sqrt{2},$$

因此所求最大值为 $1 + 3\sqrt{2}$.

方法二:已知 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$,

整理得 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$,

令 $x = 3\cos\theta + 2, y = 3\sin\theta + 1, \theta \in [0, 2\pi]$,

则 $x - y = 3\cos\theta - 3\sin\theta + 1 = 3\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$,

因为 $\theta \in [0, 2\pi]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$,

则 $\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$, 得 $\theta = \frac{7\pi}{4}$,

此时 $x - y$ 取得最大值 $1 + 3\sqrt{2}$,

且 $x = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, y = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

方法三:由 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$,

可得 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$,

设 $x - y = k$, 则圆心 $(2, 1)$ 到直线 $x - y = k$ 的距

离为 $d = \frac{|2-1-k|}{\sqrt{2}} \leq 3$,

解得 $1 - 3\sqrt{2} \leq k \leq 1 + 3\sqrt{2}$. 故选 C.

【典型错误】(1) 不能从数和形两个角度理解已知式, 导致无从下手或思维混乱;

(2) 求出最值后没有检验等号成立的条件.

三、高考数学命题改革分析与复习教学建议（人教社 课程教材研究所 章建跃）：

一、高考改革的大方向

- 党中央、国务院《深化新时代教育评价改革总体方案》要求：
“改变相对固化的试题形式，增强试题开放性，减少死记硬背和‘机械刷题’现象。”
- 非常明确的要求，这是必须做的——就像“双减”要求驱逐校外学科类培训一样，《深化新时代教育评价改革总体方案》为死记硬背、“机械刷题”踩下了刹车令！

教育部教育考试院院长孙海波在2022年9月15日教育部举行的“教育这十年”第12场新闻发布会上说：

- 高考内容改革是考试招生制度改革的重要内容，是新时代教育评价改革的重要载体，对高中教育教学改革和育人方式的转变具有重要导向作用，直接影响高校人才选拔与培养质量。
- 十年来，高考命题全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，成为铸魂育人的有效途径和引导学校实施素质教育的风向标，**从能力立意走向素养导向，从单一评价走向多维评价**，形成了具有中国特色的考试评价范式；**与高中育人方式改革和高考综合改革同向同行**，实现了学生成长、国家选才、社会公平的有机统一。
- 十年来，高考命题探索形成具有中国特色的考试评价理论和实践体系，**确立“立德树人、服务选才、引导教学”的核心功能**，回答了“为什么考”的问题；构建引导学生德智体美劳全面发展的考试内容体系，凸显学生发展核心素养要求，回答了“考什么”的问题；研制中国高考评价体系，回答了“怎么考”的问题。十年来，高考命题不断完善考试内容，创新考查形式，丰富评价手段，强化保障措施，取得了一系列突破性进展，**主要体现在以下三个方面：**

与数相解

1. 落实立德树人，实现高考由考试评价工具到全面育人载体的转变

- 高考是连接基础教育和高等教育的关键环节。党的十八大以来，高考系统性地加强考试内容的思想教育和价值引领作用，逐步由注重智育评价的人才选拔，向落实立德树人的育人载体转变，成为德智体美劳全面培养教育体系的有机组成部分。
- **一是聚焦铸魂育人，夯实信仰之基。**高考不断强化考试的育人功能，以习近平新时代中国特色社会主义思想培根铸魂，考试内容深度融入社会主义核心价值观，弘扬中华优秀传统文化、革命文化、社会主义先进文化，在引导学生坚定理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、培养奋斗精神上下功夫，将显性考查和隐性教育相结合，用精品试题让学生接受思想的启迪、文化的熏陶。

- **二是紧扣时代脉搏，培养时代新人。**围绕改革开放40周年、中华人民共和国成立70周年、打赢疫情防控阻击战、决战脱贫攻坚、决胜全面建成小康社会、中国共产党成立100周年、北京冬奥会和冬残奥会、构建人类命运共同体等重大时代主题，精心选材和设计试题，采用符合高中学生认知特点的呈现方式，在考试内容中巧妙融入新时代党和国家事业取得的历史性成就、发生的历史性变革，引导学生坚定“四个自信”，助力培养担当民族复兴大任的时代新人。

- **三是彰显五育并举，引导全面发展。**高考命题遵循高中学生的认知水平和成长规律，将对体美劳教育的引导与考查内容、考查要求、考查载体有机融合，促进学生在思想道德修养、科学文化素养、人文和审美素养、健康和劳动素养等方面全面提升，走出了一条以德引领、以智为基、体美劳强力呼应的内容改革之路。

2. 科学服务选才，实现高考由“解题”到“解决问题”的转变

- “为国选才”是高考的基本功能。高考命题探索“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”的综合考查模式，**不断增强试题的应用性、探究性、开放性**，把考查的重点放在学生的思维品质和综合应用所学知识解决实际问题的能力上，不断完善人才选拔标准和方式方法，服务高校招生和人才培养改革。
- **一是提升选才效度，考查关键能力。**高考注重考查支撑学生未来长远发展和适应社会进步要求的能力，有效鉴别学生发展潜质。通过优化考查内容、丰富呈现方式、创新设问角度等途径，突出对关键能力的考查，让善于独立思考、认知能力强的学生脱颖而出。

- **二是注重学用结合，创设真实情境。**高考加强理论联系实际，紧密结合国家经济社会发展、科学技术进步、生产生活实际等创设情境，充分考虑学生学习和生活实际，把课本知识与“具体真实的世界”联系起来，考查学生灵活运用所学知识方法分析和解决实际问题的能力，引导学生在解决实际问题的过程中建构知识、培养能力、提升素养。
- **三是突出思维品质，强调开放灵活。**高考持续优化试卷结构，创设新的题型，从材料信息的丰富性、试题要素的灵活性、解题路径的多样性等方面增强试题开放性，**强调思维过程和思维方式，鼓励学生多角度主动思考、深入探究，发现新问题、找到新规律**，引导学生在学习和备考中减少死记硬背和机械刷题。
- **中学反映：**高考命题反套路、反对背素材，材料来源于生活，接地气，死记硬背、机械刷题、题海战术难以发挥作用。

3. 有效引导教学，实现高考由“以纲定考”到“考教衔接”的转变

- 高考充分发挥教育评价的积极导向作用，与高中教育教学同向同行、同频共振，逐步形成“招-考-教-学”良性互动、有机结合的一体化育人格局，引导教学回归课标、回归课堂主渠道。
- **一是遵循课程标准，引导中学依标教学。**高考命题严格依据高中课程标准，确保“内容不超范围，深度不超要求”。考查内容限定在课程标准范围之内，既注重考查内容的全面性，又突出主干和重点内容的考查；考查要求依据学业质量标准，深度不超过其规定的层次，引导中学做到**应教尽教**，开齐开好国家规定课程。
- **二是注重以考促教，服务教学提质增效。**高考命题遵循教育规律，注重考查对基础知识、基本技能、基本方法的深刻理解，引导学生要知其然，更知其所以然，学有所思、思有所疑、疑有所问、问有所悟，**引导教学把精力放在讲透课程重点内容上**。强调在深刻理解基础上的**融会贯通、灵活运用**，不考死记硬背、不出偏题怪题，平和中有新意，灵活中见潜力，实践中出真知，引导中学把教学重点从总结解题技巧转向培养学生学科核心素养，提升课堂效果和作业效率。
- **教师普遍认为：**考试与教学的衔接越紧密、越一致，教师、学生的负担就越轻；高考注重**基础性**，强调**综合性、应用性和创新性**，加强**考教衔接**，就是对“双减”的最好呼应和落实。

- **三是坚持稳中求进，助推育人方式改革。**近年来，高考内容改革、高考综合改革、高中新课程改革、高中育人方式改革并行推进，面临新老高考衔接、新旧课标交叠。通过开展学情调研，分析考试数据，制订科学的命题策略，在考试内容覆盖上保持平衡，在命题素材选择上保持平实，在试题设问上保持平和，在试卷结构设计上保持平稳，有利于考生正常发挥，有利于教学有序开展，为各项改革平稳实施奠定坚实基础。
- **教师普遍认为：**高考命题结构科学合理，稳中有新，增强了中学把握课标理念、用好新编教材、构建有效课堂的信心。

2023年高考数学全国卷试题评析

- 2023年高考数学全国卷依据普通高中数学课程标准，贯彻中国高考评价体系理念，创新试题设计，加强关键能力考查，突出理性思维，发挥数学科高考的选拔功能；创设真实问题情境，考查考生利用数学工具解决实际问题的能力，体现数学思想方法在解决实际问题过程中的价值和作用；落实立德树人根本任务，引导“五育”并举、全面发展；积极推进内容改革，强化基础性要求，加强考教衔接，发挥对中学数学教学的积极引导作用。

1. 发挥基础学科作用，助力创新人才选拔

- 2023年高考数学全国卷充分发挥基础学科的作用，突出素养和能力考查，甄别思维品质、展现思维过程，给考生搭建了展示的舞台、发挥的空间，致力于服务人才自主培养质量提升和现代化建设人才选拔。
- **重点考查逻辑推理素养，深入考查直观想象素养，扎实考查数学运算素养，**要求考生理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

2. 创设自然真实情境，助力应用能力考查

- 高考数学全国卷在命制情境化试题过程中，在剪裁素材时，控制文字数量和阅读理解难度；在抽象数学问题时，设置合理的思维强度和抽象程度；在解决问题时，设置合适的运算过程和运算量，力求使情境化试题达到试题要求层次和考生认知水平的契合与贴切。
- 首先是**现实生活情境**，数学试题情境取材于学生生活中的真实问题，贴近学生实际，具有现实意义，具备研究价值。其次是**科学研究情境**，科学研究情境的设置不仅仅考查数学的必备知识和关键能力，而且引导考生树立理想信念，热爱科学，为我国社会主义事业的建设作出贡献。最后是**劳动生产情境**。

3. 落实“四翼”考查要求，助力“双减”政策落地

- 2023年高考数学全国卷在**反套路、反机械刷题上下功夫**，突出强调**对基础知识和基本概念的深入理解和灵活掌握**，注重考查学科知识的**综合应用能力**，落实中国高考评价体系中“四翼”的考查要求。同时，**合理控制试题难度**，科学引导中学教学，力图促进高中教学与义务教育阶段学习的有效**衔接**，**促进考教衔接**，引导学生**提高在校学习效率**，**避免机械、无效的学习**。

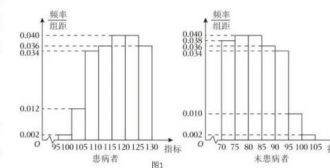
二、教学中的不适应

- 有的老师说：“反刷题”了，不刷题，我们该怎么教呢？
- “反套路”了，不搞题型、套路，我们该怎么搞？
- 有的老师给学生支招：解析几何答题策略“稳稳做对第一问，联立方程第二问，消元先摆判别式，韦达定理莫遗漏，时间允许继续做，否则舍弃做其他”。
- 基础知识的深入理解——“二级结论”就是“深入”呀！
- 基本概念灵活掌握——“秒杀大招”不就是“灵活”的体现吗？
- 生活情境那么多，怎么抓得住？该怎么入手呀？
- 运算能力很重要，但该怎么培养呢？……

“刷题”刷出来的后果

- 学生的数学认知结构差，数学水平低，数学情感差，甚至痛恨数学，不知道数学是干什么的——“数学=解题”，……
- 不审题就直接答题
- 阅读能力差，读不懂题目，看到应用题就害怕，直接放弃
- 运算能力弱，无论是方法还是速度都差强人意
- 解题习惯差，书写不规范
- 稍有变化就不知所措，“做过练过的不一定会，没见过的一定不会”
- ……

- (2023新高考II卷第19题)某研究小组经过研究发现某种疾病的患者与未患者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如图1所示的患者和未患者该指标的频率分布直方图：



利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c ，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性。此检测标准的漏诊率是将患者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$ ；误诊率是将未患者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$ 。假设数据在组内均匀分布，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率。

- (1) 当漏诊率 $p(c)=0.5\%$ 时，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$ ；
- (2) 设函数 $f(c)=p(c)+q(c)$ ，当 $c \in [95, 105]$ 时，求 $f(c)$ 的解析式，并求 $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 的最小值。

某省这道题目70%考生得0分，把全省高考数学得分直接拉低10分。

- 20.一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人（称为对照组），得到如下数据：

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

- (1) 能否有99%的把握认为该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？
 - (2) 从该地的人群中任选一人， A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”， B 表示事件“选到的人患有该疾病”。 $\frac{P(B|A)}{P(B|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(B|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R 。
- (i) 证明： $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$
 - (ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B)$ 、 $P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用(i)的结果给出 R 的估计值。

- 这些题目的情境真实，是现实中、科学研究中实际发生的问题，其中的研究方法科学且有效（利用在生活中可以清楚地观测到的现象和数据进行合理推算，进而推断出某些在实际中很难或不可能观测到的事实），是对学生应用数学知识和方法解决实际问题的能力的考查。
- 解答这一类题目，不仅要有**扎实的概率与统计基础知识**，还要有较强的**阅读理解能力**，再一个是要有较为**广泛阅历**等等。

- 学生搞不清楚问题，阅读理解水平低，“数学化”能力差，例如：
- 4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库。已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为140.0km²；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为180.0km²，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为多少？
- 这个题目应该是非常简单的，但就因为套了一个现实背景，许多学生就不知所措了。

三、如何研究高考题

- **基本理念**：以课程标准、《中国高考评价体系》及《中国高考评价体系说明》为依据，对高考数学试卷命题思想和试题特点的分析，以及各年（近几年）高考数学试题的比较，探析高考数学试题在必备知识、关键能力和学科素养等方面考查要求的变与不变，并以此为依据给出教学启示和备考建议，为高中数学教学和复习备考提供参考。
- 不恰当的理念：猎奇心理，片面的“一题多解”为刷题找依据，深挖洞，曲解命题意图为搞“二级结论”寻找依据等等。

命题分析方法

维度	分析方法
考查内容	从必备知识、关键能力和学科素养等方面进行分类分析，侧重考查要求分析。主要从考点、题量、题型、分值、难度等要素展开整体分析和专题分析。
命题意图	主要从考查目标、试题立意、试题情境和设问方式等方面，结合典型题例，对整体和专题的命题思路进行分析。
命题导向	主要从评价体系要求的“四层四翼”出发，针对命题变化，给出整体和专题的命题趋势分析，要下功夫分析试题与教材的关联，特别是要从教材中找出试题的“题源”，引导教学重视教材、回归教材。
复习教学	根据考查内容、命题特点的整体和专题分析，以教育部考试研究院关于高考命题改革指导思想为依据，从加强数学基本概念、基本原理的理解，强调知识之间的内在联系，引导学生形成学科知识系统；注重本原性方法，淡化特殊技巧。强调对通性通法的深入理解和综合运用，促进学生将知识和方法内化为自身的知识结构等方面，给出有针对性和可操作性的复习教学建议。

解题分析方法

维度	内容
试题特点	高考数学全国卷和地方卷的试题，主要从必备知识、关键能力和学科素养等方面进行分类分析，结合典型题例，侧重解法分析。重点从整体和专题试题的基础性、综合性、应用性和创新性出发，精选题例分析这“四性”的主要表现和解题特点。
试题分析	按照“基本要求、考核目标、设计特点、实测效果和育人功能”等五个要素，以题意理解（条件分析，设问理解）、思路探求（观察、联想、转化）、解答过程、回顾反思等为基本框架展开分析。对解题过程中的难点、易错点、最优思路等也要进行分析。
复习备考建议	侧重从学生备考层面，给出有针对性和可操作性的复习备考建议。

考题分析方法

维度	内容	主要意图
目标解析	主要对该考题所涉及的知识点、思想方法和关键能力的具体表现进行解析，准确解读知识点所蕴含的数学思想方法和关键能力的考查要求。	说明考什么
解法分析	主要从解题角度说明破题思路，多角度探究解题途径，对通性通法给出解题步骤，评析解法优劣，诠释不同方法的解题价值。	说明怎么考
题源分析	主要从试题来源、问题情境和命题立意等角度，并结合设问方式、源于教材和试题本质特征，以及考生常见失误、错解与防范等方面加以分析。特别要注意通过试题与教材的关联性分析，引导教学回归教材。	说明为何这样考
类题赏析	主要从举一反三的角度，对近几年高考数学中命题意图和考查方式形异质同的同类高考试题加以说明，供学生练习。	说明还能怎么考

四、回归常识，从容进行高考复习

- 高考改革的力度在加大，课程改革的步伐在加快，教学必须改变！
- 必须回到数学育人的本位上，回归数学的学科本质，回归数学教学的本来面目，把数学教好，使学生在落实“四基”、提升“四能”的过程中发展核心素养，在学懂、学通、学透数学的过程中提高应试水平。如果依然故我地刷题，那么你会输得很惨！

1. 帮助学生系统掌握基础知识、基本技能、基本方法

- **不能抛开课本搞复习！**
- “系统掌握”是指学生头脑中有清晰、稳定、可辨别的、迁移能力强的“数学知识结构图”，不仅理解知识及其蕴含的数学思想方法，而且懂得知识间的逻辑关系、联系方式。
- 复习课要在进一步明晰概念内涵的基础上，把新课中逐个学过的概念、定理、公式等用前后一致逻辑连贯的数学思想串联起来。这就必须让学生**重读课本、梳理知识，在此过程中“顺便”就提高了阅读理解能力**。老师罗列学生抄写的做法效果有限，应避免。

- 实际上，大多数高考题是教材中题目的变式、综合，有的就是课本上的题目。
- 例（新高考全国I卷•12）下列物体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有
 - A. 直径为0.99 m的球体
 - B. 所有棱长均为1.4 m的四面体
 - C. 底面直径为0.01 m，高为1.8 m的圆柱体
 - D. 底面直径为1.2 m，高为0.01 m的圆柱体
- 【考查目标】试题考查基本几何体（正方体、球体、正四面体、圆柱体）的**结构特征**，基本元素的度量；突出考查正方体与球、三棱锥、圆柱综合情境下学生分析问题能力和空间想象能力。
- **问题：什么叫“结构特征”？**

以教材为依托构建层次递进的复习过程

- **深化理解**：通过系统阅读教材，深化理解教材中的核心知识，深化认知层次，要特别注意引导学生琢磨每一章的小结；
- **建立联系**：用联系的观点看待知识，建立相关知识的联系，形成知识的多元联系表示方式，提升认知水平；
- **优化结构**：沟通教材中形异质同、形同质异问题的内在联系，优化认知结构；
- **拓展延伸**：通过一般化、特殊化、类比、联系等对已有知识进行探源、拓展、延伸，形成创新学习能力。

- 北京朝阳外国语学校的**经验**

例 等差数列性质的复习

- **一般观念**：运算是代数学的根源所在。
- **研究的问题**：主要是“等差数列的项与项之间的关系”，应该利用等差数列的定义。
- **研究策略与方法**：通过运算、变形，探究不变量、不变性、规律性。
- 等差数列{a_n}中，从第二项开始任意一项都是相邻两项的等差中项；可以推广为：a_m，a_p，a_n是{a_n}中的三项，且2p=m+n，那么2a_p=a_m+a_n。特别地，当 $\frac{m+n+1}{2}$ 为整数时， $a_{\frac{m+n+1}{2}} = \frac{a_1+a_n}{2}$ ；当 $\frac{n}{2}$ 为整数时， $\frac{a_n+a_n}{2} = \frac{a_1+a_n}{2}$ 。

- 如果a_k（k>1）是等差数列{a_n}中的一项，a_k可以是{a_n}中哪些项的等差中项？
- 探究可得：{a_n}中与a_k“等距离”的两项都以a_k为等差中项。由此可得许多结论，特别是：
当m+n=p+q时，有a_m+a_n=a_p+a_q。

- S_n 、 a_n 的结构特征的研究。
- 前 n 项和 S_n 、 a_n 之间的相互关系也是值得研究的问题。
- 从 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中你能发现什么？
- $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1+a_n}{2}$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的平均数！
- 等差数列的研究中，善用平均数是非常重要的。
- 要重视自然数数列的性质——**任何等差数列都是自然数数列的变式。**

- 例记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲： $\{a_n\}$ 为等差数列，乙： $\{S_n\}$ 为等差数列，则
 - A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 - B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 - C. 甲是乙的充要条件
 - D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
- **问题：这个题目考什么？**

例 解析几何的复习

- 点到直线的距离公式的推导——**多元联系表示，认知结构的升华**
- 方法一：定义法；
- 方法二：利用代数变形
$$\begin{cases} A(x-x_0) + B(y-y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C), \\ B(x-x_0) = A(y-y_0). \end{cases}$$
- 方法三：从特殊到一般——直线平行于坐标轴，到一般直线；
- 方法四：等积法；
- 方法五：向量法；
- 方法六：函数法；……

- 距离、斜率、不变量、运算统领的**圆锥曲线**

2.明确解题教学的目的

- 树立正确的解题教学目的很关键，教师必须思考清楚“做题目，为什么”这个问题。
- 解题教学的首要目的是巩固概念，最终目的是学会思考，过程中要培养良好的解题习惯、发展分析和解决问题的能力。
- 解题不是你教会的，是学生自己学会的，教师的核心任务是选好题目。
- 怎样才能选好题目？——教师自己独立解答近5年的高考题，把握方向，然后对标高考题进行选题。

3.“回归基础”很重要

- “回归”有两层意思，一是学生能熟练运用课本知识解决“基础题”；二是养成从基本概念出发思考和解决问题的习惯。
- 2022年乙卷文科16题：若 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数，则 $a=$ ____， $b=$ ____。
 - (1) 看函数解析式的代数结构，发现 $1 \notin I$ ，这一步非常关键；(2) 由奇函数的定义得出 $-1 \notin I$ ，这是从定义出发思考问题；(3) 由 $\left|a + \frac{1}{1-x}\right| \geq 0$ ，根据对数的定义知 $x=-1$ 时必有 $a + \frac{1}{1-x} = 0$ ，所以 $a = -\frac{1}{2}$ ，于是 $f(x) = \ln\left|\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\right| + b$ ，于是 $0 \in I$ ；(4) 由奇函数的性质，有 $f(0)=0$ ，易得 $b = \ln 2$ ，这是利用性质解决问题。

4.培养良好的解题教学习惯

- **精选例题。**给学生出一道题，自己先做十道题。看解答而不做题，没有切身体验，很难使例题典型、精彩，并会造成“该讲的讲不出，不该讲的拼命讲”的后果。
- **要求学生认真读题、审题。**提醒学生关注“本题涉及哪些基本概念？”“得出结论需要哪些条件？”等。当前普遍的做法是，老师替学生读题，读完就问“本题属于什么题型？”接着就问“某某同学，你说该怎么解？”这是导致学生不良解题习惯的根源。

- **与学生一起分析题意，交流解题思路**，教师在适当时机给点睛之笔。当前，老师包办例题解答、学生重复模仿解题的做法比比皆是，这是不懂学生学习规律的表现。
- **叫几位学生板演，让其他学生动手解答，教师巡视、观察。**“老师板演学生看”的做法，忘记了“饭要亲自吃”的常识，剥夺了学生自主实践、独立思考的机会，结果肯定是“讲过练过的不一定会，没讲没练的肯定不会”。
- **评价学生的板演。**先让学生作自我评价、相互评价，教师再“画龙点睛”。
- **问一问“还有不同的方法吗？”**追问一下“你是怎么想到的？”
- **解题后的回顾、反思。**问一问“你认为解这类题目的一般步骤是什么？”只有让学生时刻把“举一反三”、“触类旁通”放在心上，经常实践，学会独立思考，才能使他们掌握在考场上取胜的法宝。

5.加强“变式”

- 应对新颖性的策略就是要根据数学题“万变不离其宗”的特点，围绕数学的基础知识、基本技能、基本方法这个“宗”，在“四基”上下足功夫。例如关于数列的问题，要在理解基础知识的基础上，抓住等差数列、等比数列的基本量 a_1 、 d 、 q 、 a_n 、 S_n 等及其相互关系，熟练掌握基本性质（数列要素之间的关系）、常用性质（运算中的不变性、规律性等）。
- 通过适当的问题与方法，使学生理解如何进行变式，并逐步领悟变式的思想方法，掌握透过现象看本质的本领，**最终形成“以不变应万变”的应试能力。**

6.加强综合与联系

- 可以说每一道高考题都是通过综合与联系而命制出来的。

例 (2022·新高考II卷·22) 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $x>0$ 时， $f(x)<-1$ ，求 a 的取值范围；

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$ ，证明： $\frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

- 试题涉及求导运算、用导数研究函数性质、问题转化（将求变量变化范围转化为求函数最值）、用函数性质证明不等式，分类讨论思想、等价转化思想等。

7.加强数学建模活动与应用

- 乙卷第19题：某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山。为了估计林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积和材积量，得到如下数据：

样本号 <i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得到 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；
 - (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到0.01）；
 - (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 180m^2 ，已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比。利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值。
- 试题的考查完全按照数学建模的思路进行，只不过仅考查数学建模环节的后半段，特别是求解模型的环节。

• (2023新高考II卷 12, 多选题) 在信道内传输0, 1信号, 信号的传输相互独立. 发送0时, 收到1的概率为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 收到0的概率为 $1 - \alpha$; 发送1时, 收到0的概率为 $\beta(0 < \beta < 1)$, 收到1的概率为 $1 - \beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送1次, 三次传输是指每个信号重复发送3次. 收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码 (例如, 若依次收到1, 0, 1, 则译码为1).

- A. 采用单次传输方案, 若依次发送1, 0, 1, 则依次收到1, 0, 1的概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$
- B. 采用三次传输方案, 若发送1, 则依次收到1, 0, 1的概率为 $\beta(1 - \beta)^2$
- C. 采用三次传输方案, 若发送1, 则译码为1的概率为 $\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$
- D. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送0, 则采用三次传输方案译码为0的概率大于采用单次传输方案译码为0的概率

五、归根到底要做好思维的教学

- 从“解题”到“解决问题”
- 一是提升选材效度, 考查关键能力. 高考注重考查支撑学生未来长远发展和适应社会进步要求的能力, 有效鉴别学生发展潜质. 通过优化考查内容、丰富呈现方式、创新设问角度等途径, 突出对关键能力的考查, 让善于独立思考、认知能力强的学生脱颖而出.
- 二是注重学用结合, 创设真实情境. 高考加强理论联系实际, 紧密结合国家经济社会发展、科学技术进步、生产生活实际等创设情境, 充分考虑学生学习和生活实际, 把课本知识与“具体真实的世界”联系起来, 考查学生灵活运用所学知识方法分析和解决实际问题的能力, 引导学生在解决实际问题的过程中建构知识、培养能力、提升素养.
- 三是突出思维品质, 强调开放灵活. 高考持续优化试卷结构, 创设新的题型, 从材料信息的丰富性、试题要素的灵活性、解题路径的多样性等方面增强试题开放性, 强调思维过程和思维方式, 鼓励学生多角度主动思考、深入探究, 发现新问题、找到新规律, 引导学生在学习和备考中减少死记硬背和机械刷题.

• 思维教学要抓好的几个关键

关键一: 以数学整体观为指导, 为学生搭建研究一个数学对象(问题)的整体框架, 着力培养思维的逻辑性。

- 课堂教学要以“事实(背景)——概念(本质)——性质(关系、规律)——结构(联系)——应用”为明线, 以“事实(背景)——方法——方法论——数学学科本质观”为暗线, 并要强调结合明线布暗线, 形成数学基本思想、方法的“渗透——明确——应用”的有序推进, 不断强化对数学本质的理解, 关注数学概念的现实背景, 引导学生从数学概念、原理及法则之间的联系出发, 建立起有意义的知识结构, 使学生在掌握“四基”、发展“四能”的过程中有效发展核心素养。

- 关于2023年度山东省中小学教师和校长省级集中培训... 07-10
- 关于遴选2023年度山东省中小学教师和校长省级集中... 07-03
- 关于公布2022年“一师一优课、一课一名师”活动... 06-21
- 高中劳动教育骨干教师培训班顺利开班——2022年度... 04-07
- 初中劳动教育骨干教师培训班顺利开班——2022年度... 04-07
- 小学劳动教育骨干教师培训班顺利开班——2022年度... 04-07

- 国培育培
 - 区域研修
 - 专题培训
 - 信息技术
 - 合作发展
 - 名师名校长
 - 新教师培训
- 工作坊

2023年山东省
“互联网+教师专业发展”
幼儿园 小学 初中 高中

山东省教师培训
管理系统

齐鲁名师名校长
领航工作室

山东省中小学教师信息
技术应用能力提升工程2.0

思维教学的几个关键

章建跃
(人民教育出版社 课程教材研究所)



<https://player.qjteacher.com/learning/64f5bd486060470001d79c2e/64a689f39705240001cc03fb>

- 数学教学中注重整体框架特别重要，其原因是培养思维的逻辑性需要以数学知识发生发展过程的内在逻辑为基础。
- 在这个框架下展开教与学，可以确保结构的合理性、内容的可预见性、过程的逻辑性、探索的方向性、思维的主动性、方法的有效性，进而实现教学的高质量。学生在这样的框架下展开数学活动，可以极大增强学习的自主性、自觉性，不仅能提高学习效率，促进学生系统掌握学科基础知识、基本技能、基本方法，而且能培养学生的学习能力。

“不等式”内容的整体架构

- 三歧性；
- 实数大小关系的基本事实——为什么要把“三歧性”转化为“基本事实”？
- 等式性质与不等式的性质——自反性、对称性、传递性的地位作用是什么？性质要研究的问题是什么？
- 重要不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ ——特殊的不等式性质；
- 基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b > 0$)——特殊的重要不等式；
- 两个基本模型： $p, q \in \mathbb{R}^+, p+q=A, pq=P$ ，若 A 为常数， $p=q$ 时 P 最大；若 P 为常数， $p=q$ 时 A 最小——特殊的基本不等式。

公理化体系，建构起代数推理的逻辑基础
从一般到特殊，知识发展的逻辑

运算观念统领下研究基本不等式

- 从 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 到 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ——代数变换；
- 基本不等式的证明——分析法、综合法等等；
- 基本不等式的多元联系表示——图形表示；
- 通过运算得到基本不等式的变式（以下字母都取正的）——不仅要让学生会证明，而且要让去研究它们是怎么来的；
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，特别地， $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ；
- $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$ ， $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$ ；
- $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ，……
- 特例：两个基本模型。

关键二，把“发现和提出问题”作为基本任务

- 在“如何发现和提出值得研究的问题”上加强指导，有效培养思维的创造性。
- 现实中，学生鲜有主动提问机会，都是老师问、学生答，其原因在教师没有将发现和提出问题作为教学基本任务，更深层原因则在教师的教学观——教解题考高分是正事，“我自己都不知道如何发现和提出问题，怎么可能教学生自己发现和提出问题？”显然，这样的教学观肯定会致“单纯教师讲学生听、教知识学知识”现象的发生。

转变教学观要从改变教学行为做起

- 两个教学策略的应用：
 - 一是加强一般观念的统领性，为学生提供学习的先行组织者。数学研究的基本方式是先通过概念明确界定研究对象，再基于概念进行逻辑推理（包括归纳、类比、演绎），得出性质、公式、法则等等，进而建构起数学知识大厦。其中，如何抽象数学对象（问题）并通过概念予以明确，数学对象的性质指什么，从当前内容出发通过类比、推广、特殊化获得新结论等等，都是有基本思路可循的，要让学生明白数学研究的这种特点，从而指引学生自主抽象数学概念、探索发现数学性质。

- 二是在具体思考过程中，给学生一个基本的逻辑思考架构



数学对象就是一个系统，数学对象的组成元素就是这个系统的要素，要素之间的基本关系决定了对象的一般特性，而要素的某些特殊形式、特殊关系往往反映了对象的重要特性。这样，在抽象数学对象要素及其基本关系的基础上，依着一般与特殊及其相互转化的思路探索数学对象的各种性质，乃是数学研究的基本之道。

- 关键三、根据数学知识发生发展过程的内在逻辑，创设系列化情境，提出高质量问题串，为学生创造学习机会，培养思维的创造性、深刻性、批判性等。
- 在教学方式的变革中，“大力实施基于情境、问题导向的互动式、启发式、探究式、体验式等课堂教学”是关键，只有这样才能切实地为学生创造独立思考、自主探究、合作交流的空间，使各种思维品质得到全面培养。具体而言，就是要在前面两点的指导下，根据数学知识的发生发展过程，提出具有内在逻辑关联性的系列化问题，并在问题引导下放手让学生展开自主学习。

- 关键四，给学生更多自主、有效的学习时间，从而为学生创造更多的学习机会。
- 学生在课堂中获得的学习机会对提高教学质量有决定性影响。
- “学习机会”的内涵：最初是以学生在教学过程中获得的时间作为衡量标准的，后来得到持续研究，有学者建构了“学习机会”的四维框架，包括内容范围、内容深度、内容重点和教学过程质量。PISA测试也将“学习机会”作为影响学生学业表现的重要因素，并在研究中将相应的内涵拓展到与学习环境相关的各要素上，其中包含教学内容、教学过程和教学质量等。
- 在课堂教学中为学生创造充分的学习机会，还是要从“教什么”、“怎么教”、“用多少时间”、“采取怎样的教学策略”等课堂教学基本要素出发进行思考。

为学生创造学习机会的几个方面

- (1) 教学目标的层次，根据内容特点和学生认知水平确定相应的教学目标层级。我国课程标准采用了解、理解、掌握、运用（经历、体验、感悟、探索）；布鲁姆目标分类学中给出了6个层级：记忆、理解、应用、分析、综合、评价；SOLO学习结果五层级理论：未结构化、单一结构层、多重结构层、关联结构层、扩展结构层；等等。这些理论对于评价学生的认知水平和学习成果非常有用，也有助于我们理解学生在学习过程中的思考方式和理解程度。同时，还要注重多维度目标设置，在确定数学教学目标时，要将“四基”、“四能”和数学学科核心素养综合考虑进去。
 - 当前教学中存在的问题是以知识记忆、技能熟练为主要目标，不仅单一而且层次较低。

- (2) 教学内容的广度、深度，这里要与教学目标相匹配。广度上，要确保学生完整学习必备知识的机会；深度上，要为学生创造强化理解所学内容的数学本质，促使学生通过建立数学概念、原理及法则之间的联系，形成对未来学习有支撑意义的结构化数学知识体系，把用整体的、联系的、发展的眼光看问题，从而形成科学的思维习惯作为重要的教学内容；等等。
 - 当前教学中存在“高考不考就不教”的现状，这是剥夺学生学习机会的做法。

- (3) 教学过程的质量，主要体现在围绕核心概念、重点知识，为学生创造解决具有挑战性问题的机会；充分发挥学生学习主体的作用，通过恰时恰点的问题，引导学生采用认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等多样化学习方式，在获得“四基”、提高“四能”的过程中，逐步形成数学核心素养；激发学生兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑解难，培养学生良好的学习习惯，形成积极的情感、态度和价值观。
 - 当前的课堂教学过程中，学生鲜有机会独立面对挑战性问题，被动听讲、机械模仿、重复刷题等现象非常普遍，学生普遍缺乏学习机会。

- (4) 学习时间的充分性，给学生足够的自主学习时间，使学生能从容地想问题、悟本质、参思想。大家都会说“教育是慢的事业”，课堂教学要懂得“慢慢辩证法”，但实际教学中赶进度已经成为常态，三年课程两年甚至一年半完成，基础知识教学采用“告诉式”，提出问题后就急于提示，甚至不给思考时间就让学生立即回答……可以说，不给学生充分的思考时间是我国学生在课堂中缺少学习机会的一个主要原因，也是基础教育极端功利化的主要表现。

• **关键五**，以研究一个数学对象（问题）的一般套路为指引，以**数学思维过程的基本框架**为线索设计教学过程，通过逻辑连贯的问题串引导学生的数学思维活动，使学生掌握数学思维方式。

• **思维过程的基本框架是**：（1）观察与实验，（2）归纳与演绎，（3）比较与分类，（4）分析与综合，（5）抽象与概括。

• 强调以这一基本框架为线索进行教学设计，目的是使学习过程完整化，让学生有机会完整经历知识的发生发展过程，促使学生运用观察、实验、猜想、运算、推理、验证、数据分析、直观想象等发现和提出问题、分析问题和解决问题。

• **当前的课堂教学，思维过程不完整是比较普遍的，就是所谓的“抬头去尾烧中段”，其实是思维教学不完整，必然导致学生的思维缺陷。**例如，学生普遍害怕应用题，本质上是学生在观察、实验、数据分析、直观想象等方面没有得到应有的训练。

• 按照思维过程的基本框架展开思维教学，应该在“如何观察”、“如何归纳”、“如何比较”、“如何抽象”等方面加强引导。

• **关键六**，注重数学语言的训练。

• 数学是一种独特的语言：

1. 精确性：数学语言是一种非常精确的语言，每一个数学概念都被明确定义并使用符号，这使得数学可以清晰地传达和交流，避免了歧义和误解。

2. 抽象性：数学语言经常使用抽象概念来描述和表达问题。通过抽象，数学家可以处理通用的问题，并推导出普遍有效的结论。这种抽象性使得数学具有广泛的适用性。

3. 符号系统：数学语言使用符号和符号系统来表示概念和关系。这些符号可以表示数值、运算、方程、函数和其他数学对象。符号系统使得数学语言更加紧凑、简洁，并且可以进行复杂的计算。

4. 逻辑性：数学知识的表达基于严密的逻辑推理和证明。例如几何体系的基本框架是这样建构的：**通过定义确定论证的对象，通过公理确定论证的起点，通过证明确定论证的逻辑，通过命题确定论证的结果。**这样建构起来的知识体系，使得数学成为一门具有逻辑性、准确性的学科。

5. 符号化思维：数学思维是一种符号化思维。用数学解决问题往往要先使用数学概念和符号将问题数学化，然后再通过符号推理得出结果。

在数学语言学习中可能遇到的困难

1. 数学词汇理解困难：学生可能会面临理解和记忆数学术语的挑战。数学术语通常与日常语言中的词汇不同，学生需要花时间理解其特定的数学含义和用法。

• 例 日常语言：我有一副三角板；我只有一副三角板。

• 数学语言：我有且只有一副三角板。

2. 符号和符号系统的困惑：数学使用各种符号和符号系统来表示概念和关系，学生可能会不知道如何解读和使用这些符号。

例 分数、小数、字母表示数、 a^0 ($a \neq 0$)， \sqrt{a} ， $\log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，

$N > 0$)， $y = \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$ ， $|y| \leq 1$)， $\sum_{i=1}^n a_n$ ， C_n^m ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ，

$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^{k-1} x^k a^{n-k}$ ，……

$f(x)$ 表示以 x 为自变量，对应关系为 f 的函数。 $f(a)$ 表示在 $f(x)$ 的定义域中取一个确定的值 a 时所对应的函数值。

• 大家还记得下面的公式表示什么吗？

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X=k) = \frac{C_k^m C_{N-k}^{M-k}}{C_N^M}, k=m, m+1, m+2, \dots, r.$$

其中 $n, N, M \in \mathbb{N}^+$ ， $M \leq N$ ， $n \leq N$ ， $m = \max\{0, n-N+M\}$ ， $r = \min\{n, M\}$ 。

3. 不同语言的转换：一个数学对象一般都可以用多种数学语言表示，这些语言之间的转换对学生而言比较困难。

例如，学生的作图能力有待提高，常常因为文字语言、符号语言与图形语言之间的转换有困难而影响问题的解决

4. 阅读数学文本的困难：数学文本包含丰富的信息和符号，学生可能会面临理解和解读数学问题陈述、图表、公式和证明等方面的困难。

5. 解题思维和表述能力不足：学生可能会不知道如何将数学思想和解题过程用适当的数学语言表达出来。他们可能会在表述和解释解题步骤中遇到障碍，从而影响到他们的数学表达能力。

6. 数学应用和实际情境的转化困难：在将现实问题数学化的过程中，使用符号是必须的，学生可能会因为不能灵活使用数学的符号化语言而导致现实问题数学化的困难，从而不能准确地将数学语言应用于解决实际问题。

例 理解函数概念的难点——语言符号角度

（1）对应关系

例1 已知 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+3a, & x < 1 \\ \frac{a}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，求实数 a

的取值范围。

有学生根据条件列出的不等式是： $(a-1)x+3a > \frac{a}{x}$ 。

（2）逻辑符号“ \forall ”与“任意性”

有学生认为，“任意性”等价于“随意的”、“无穷多”。

（3） \geq （或 \leq ）

通过严格的数学语言训练培养学生的思维能力

• 确保学生了解数学术语和符号的含义：数学是一门需要敏锐的语言感知能力的学科，学生需要掌握数学语言表达、表示和解释的能力。因此，在教学中不断强调数学术语和符号的含义，使学生逐步掌握符号表达的内涵。

• 你怎么理解这个题的题意：“抛物线的方程是 $y^2=2x$ ，圆 A 的圆心 A 在 x 轴上运动。问这个圆运动到什么位置时，圆与抛物线在交点处的切线互相垂直。”

• 注重数学思维的逻辑性：在训练学生的数学思维时，逻辑性是非常关键的因素。要适当引导学生通过分析、推理和演绎，建立数学思维的逻辑框架，让学生有机会独立思考和解决问题。

• 强调数学思维的抽象性：数学不仅是一门具有逻辑性的学科，也是一门非常抽象的学科。为了提高学生的数学思维水平，要引导学生从具体事物中抽象出规律，并能够将其运用到其他问题上。

关键七，树立正确的学生观，相信学生，鼓励学生，培养学生的自信心。

• 在交流中经常听到老师说，“我们学校生源差，我讲了n遍学生还听不懂，让他们自主探究怎么可能？”所以教师把一些有含金量的问题、关键性的结论等等都越俎代庖了。这是学生观出现偏差的表现。

- 对未知事物的探索是学生的天性，需要教师倍加爱护，我们常常因自己对学生心理的无知，低估学生的创造力而无意间扼杀了这种天性；
- 学生的创新思维需要教师的激发，使学生学会思考是数学教育的意义所在；
- **要激发学生的创新思维，教师自己应先学会思考，归纳、类比、推广、特殊化是基本的发现与创新之道；**
- 以一般观念为指导，通过问题引导思考，给学生创设独立概括概念、性质、公式、法则的机会，这是教师的教学智慧所在。

要加强对学生学习方式的研究

- **课堂互动和课堂讨论的质量还有待提高。**教师缺乏对学习方式的研究，对课堂提问和课堂讨论的相关理论知识了解不够，有效组织学生自主、合作学习的方法和指导的能力有待提高。
- **学习方式的变化：**调动各种感官参与数学认知过程，通过学生自己的观察、操作、实验，获得抽象数学概念、原理所需要的现实材料，在此基础上开展归纳、类比，抽象、概括活动而抽取共性获得概念，发现规律获得原理、性质，获得解决问题的方法的启发。

加强体验式学习方式的运用

- 让学生获得数学概念、原理抽象概括的直接体验，不仅有数学对象的要素、概念的内涵的归纳，法则、性质、公式等的归纳和发现，而且有“如何研究”“如何发现”的方法论感悟。
- 使数学知识成为学生自己发现的结果，为理解数学知识奠定坚实基础，同时也对应用知识的背景条件形成完整的认识。
- **使数学学习成为学生自己可以掌控的过程。**
- **教之道在于度，学之道在于悟。**“悟”是需要时间的，教师要学会等待，不要急于“自答”。
- 课堂中经常看到这样的现象：教师对学生逼得太紧，“对不对？对不对？对不对？！”；轻易打断学生的发言；学生一时回答不出就急着换人；等等。
- 一定要记住：学生是成长过程中的个体，对事物的体验不可能一下就那么深，想得也不可能那么快，他们需要充分的独立思考的时间和空间。

发挥非认知因素的作用

- 激发学生的兴趣、好奇心，调动学生的学习热情，使学生以一种积极的态度投入探究活动。
- 积极的情感体验是激发灵感的强大动力，可以促使创造性思维的产生。教师对学生的鼓励、信任对学生的学习状态具有极大的正面激励作用。

结束语

- 新高考的命题强调“依据高中课程标准，进一步增强考试与教学的衔接”，“教什么考什么”是命题的基本原则。所以，教学必须以课程标准为准，把落实教材作为基本任务。刷题时代终将过去，回归数学内容的本质才是正道。

参考文献：

- 1.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）
- 2.中国高考评价报告
- 3.高考数学命题改革分析与复习教学建议
人教社 课程教材研究所 章建跃
- 4.思维教学的几个关键
人教社 课程教材研究所 章建跃
- 5.发挥学科特点、坚持改革创新
恢复高考40年数学科命题评析（1977-2017） 任子朝
中国考试2017.2

