

函数与导数

2021级高三数学组 罗丽芳

课标要求

1. 函数概念与性质

本单元的学习，可以帮助学生建立完整的函数概念，不仅把函数理解为刻画变量之间依赖关系的数学语言和工具，也把函数理解为实数集合之间的对应关系；能用代数运算和函数图象揭示函数的主要性质；在现实问题中，能利用函数构建模型，解决问题。

内容包括：函数概念、函数性质、*^[1] 函数的形成与发展。

(1) 函数概念

①在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系刻画函数，建立完整的函数概念（参见案例2），体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用。了解构成函数的要素，能求简单函数的定义域。

②在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数，理解函数图象的作用。

③通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用。

(2) 函数性质

①借助函数图象，会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值，理解它们的作用和实际意义。

②结合具体函数，了解奇偶性的概念和几何意义。

③结合三角函数，了解周期性的概念和几何意义。

2. 幂函数、指数函数、对数函数

幂函数、指数函数与对数函数是最基本的、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础。本单元的学习，可以帮助学生学会用函数图象和代数运算的方法研究这些函数的性质；理解这些函数中所蕴含的运算规律；运用这些函数建立模型，解决简单的实际问题，体会这些函数在解决实际问题中的作用。

内容包括：幂函数、指数函数、对数函数。

(1) 幂函数

通过具体实例，结合 $y=x$ ， $y=\frac{1}{x}$ ， $y=x^2$ ， $y=\sqrt{x}$ ， $y=x^3$ 的

图象，理解它们的变化规律，了解幂函数。

(2) 指数函数

①通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$ ； m, n 为整数，且 $n>0$)、实数指数幂 a^x ($a>0$ ，且 $a\neq 1$ ； $x\in\mathbf{R}$) 含义的认识，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质。

②通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念。

③能用描点法或借助计算工具画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点。

(3) 对数函数

①理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数。

②通过具体实例，了解对数函数的概念。能用描点法或借助计算工具画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点。

③知道对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数 ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)。

④* 收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用。

2. 一元函数导数及其应用

本单元的学习，可以帮助学生通过丰富的实际背景理解导数的概念，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决一些实际问题。

内容包括：导数概念及其意义、导数运算、导数在研究函数中的应用、* 微积分的创立与发展。

(1) 导数概念及其意义

①通过实例分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想。

②体会极限思想。

③通过函数图象直观理解导数的几何意义。

(2) 导数运算

①能根据导数定义求函数 $y = c$ ， $y = x$ ， $y = x^2$ ， $y = x^3$ ， $y = \frac{1}{x}$ ， $y = \sqrt{x}$ 的导数。

②能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则，求简单函数的导数；能求简单的复合函数（限于形如 $f(ax + b)$ ）的导数。

③会使用导数公式表。

(3) 导数在研究函数中的应用

①结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性；对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间。

②借助函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值；体会导数与单调性、极值、最大（小）值的关系。

对试题认识

2023年新高考1卷

题型	题号	考点	知识点组合
选择题	1	集合	解不等式、交集运算
	2	复数	复数运算、共轭复数
	3	向量	向量数量积坐标运算
	4	函数	指数型复合函数单调性
	5	解析几何	椭圆离心率
	6	解析几何	直线与圆为背景，三角求值
	7	数列	等差数列
	8	三角函数	三角恒等变换
	9	概率统计	数字特征
	10	函数	情境问题，运算，比较大小
	11	函数	抽象函数，函数性质
	12	立体几何	组合体
填空题	13	概率统计	排列组合
	14	立体几何	台体体积
	15	三角函数	三角函数性质
	16	解析几何	双曲线性质
解答题	17	三角函数	解三角形
	18	立体几何	平行和空间角
	19	导数	单调性与不等式证明
	20	数列	等差数列，运算
	21	概率统计	概率
	22	解析几何	抛物线与矩形周长

27分

卷别	函数与导数			
新课标 1	4 复合函数 单调性	10 对数运算	11 抽象函数	19 导数：单调性，证明不等式
新课标 2	4 函数 已知 奇偶性 求参数	6 导数： 已知 单增求参数范围	11 导数 已知有极值判断参数关系	22. 导数：证明不等式，已知极值点求参数
全国甲卷	10: 函数的交点个数	13 函数 已知 奇偶性 求参数	21 导数： 单调性与恒成立	
全国乙卷	4 函数 已知 奇偶性 求参数	16 导数： 已知 单增求参数范围	21 导数： 单调性与恒成立	
天津卷	4. 识图	15: 已知 函数的零点个数 求参数范围	20: 导数： 证明与n有关的不等式	
上海卷	5. 分段函数 的值域	18 已知 函数零点个数 求参数	21: 导数与数列综合	

三年新高考I卷分值纵向对比

知识点	2020年新高考1卷				2021年新高考1卷				2022年新高考1卷			
	选择	填空	解答	分值	选择	填空	解答	分值	选择	填空	解答	分值
集合	1	0	0	5	1	0	0	5	1	0	0	5
复数	1	0	0	5	1	0	0	5	1	0	0	5
函数和导数	4	0	1	32	1	2	1	27	3	1	1	32+
三角函数和平面向量	2	1	1	25	3	0	1	27	2	0	1	22
数列	0	1	1	17	0	1	1	15	0	0	1	10
立体几何	1	1	1	22	2	0	1	22	3	0	1	27
解析几何	1	1	1	22	2	1	1	27	1	2	1	27
统计概率	2	0	1	22	2	0	1	22	1	1	1	22

函数

载体：基本初等函数、抽象函数、
复合函数、分段函数等

函数三要素

函数性质

一、适当拓展教材上的内容（特别注意性质）

例 1 【2017 年全国 1】已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(2-x)$ ，则 ()

- (A) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增
- (B) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减
- (C) $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称
- (D) $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

例 2 (2022·新高考 I 卷 T12) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ，记

$g(x) = f'(x)$ ，若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$ ， $g(2+x)$ 均为偶函数，则 ()

- A. $f(0) = 0$ · B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ · C. $f(-1) = f(4)$ · D. $g(-1) = g(2)$ ·

二、重视基础运算

例 3 (2020 年全国 3) 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$

C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

例 4 【2018 年全国 3】 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()

A. $a + b < ab < 0$

B. $ab < a + b < 0$

C. $a + b < 0 < ab$

D. $ab < 0 < a + b$

例 6 (2023 年新课标全国 I 卷第 10 题) 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声

压级 $L_p = 20 \times 10 \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压

级:

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	60 : 90
混合动力汽车	10	50 : 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则

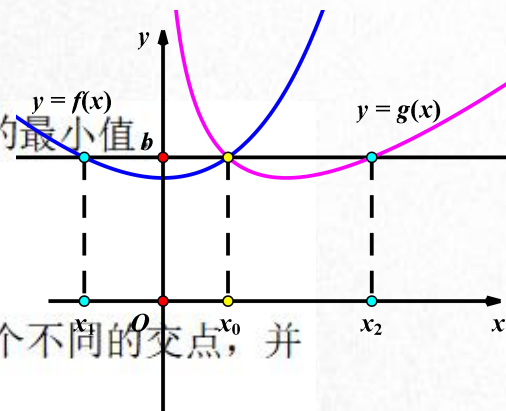
→ (□□).

A. $p_1 \geq p_2$ → B. $p_2 > 10p_3$

C. $p_3 = 100p_0$ → D. $p_1 \leq 100p_2$

三、反函数为背景

2022 新高考 I 卷 22. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值 b



(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并

且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

因为 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 互为反函数, 图像关于 $y = x$ 对称,

$y = x + b$ 和 $y = x - b$ 也互为反函数, 图像关于 $y = x$ 对称

$e^x = x + b$ 与 $\ln x = x - b$ 共有三个相同的根

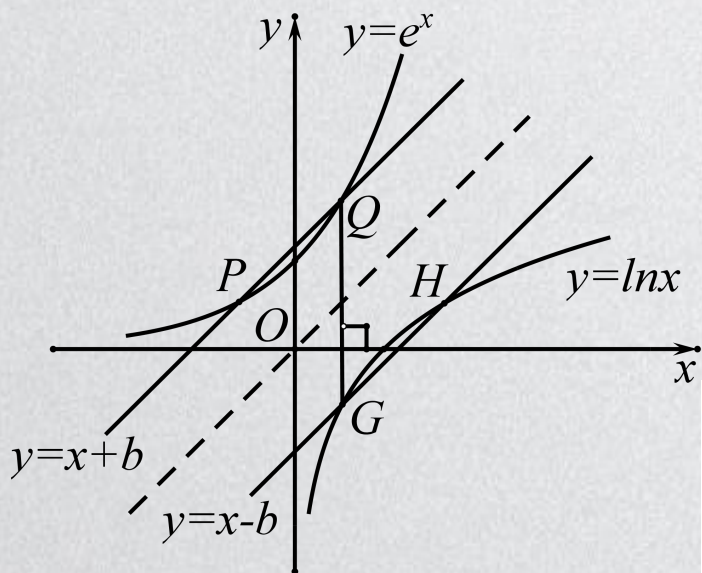


图2

$P(x_1, y_1), Q(x_0, y_0), G(x_0, y_0'), H(x_2, y_2)$, 由反函数的对称性可知

$$x_1 = y_0', y_1 = x_0; \quad x_2 = y_0, y_2 = x_0$$

$$x_0 - x_1 = y_2 - y_0'; \text{ 又直线 GH 斜率为 1, } y_2 - y_0' = x_2 - x_0$$

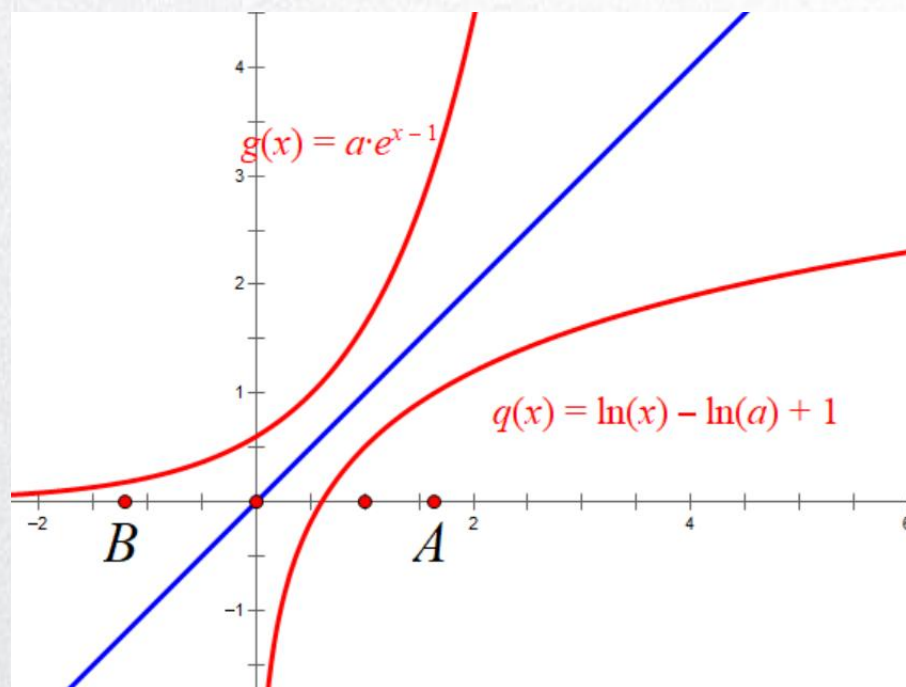
$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 2x_0$$

(2020·新全国 1 山东) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$. \leftarrow

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积; (2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围. \leftarrow

$y = ae^{x-1}$ 的反函数为 $y = \ln x - \ln a + 1$

$$ae^{x-1} \geq x, e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow a \geq 1.$$



四、小题不小指对比大小难度加大

2022 新高考 17. 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

2021 全国乙理 12. 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$. 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

2022 全国甲理 12. 已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4 \sin \frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

方法：构造函数、放缩、泰勒展开

导数

基础：单调性与极值、最值
导数几何意义：切线

不等式

零点

导数题的分类

单调性

- 分离变量，构造函数
- 转化成不等式恒成立问题

极值与最值

- 分类讨论

不等式证明

- 虚设极值点，指对放缩，分组求最值

极值点有关的不等式

- 消元

数列不等式

寻求通项

恒成立问题

- 多变量不等式
- 含指对不等式
- 含三角函数不等式等
- 端点分析

存在性问题

任意存在综合问题

- 考得少

整参数问题

- 虚设极值点
- 先猜再证

零点个数

- 分类讨论分离参数

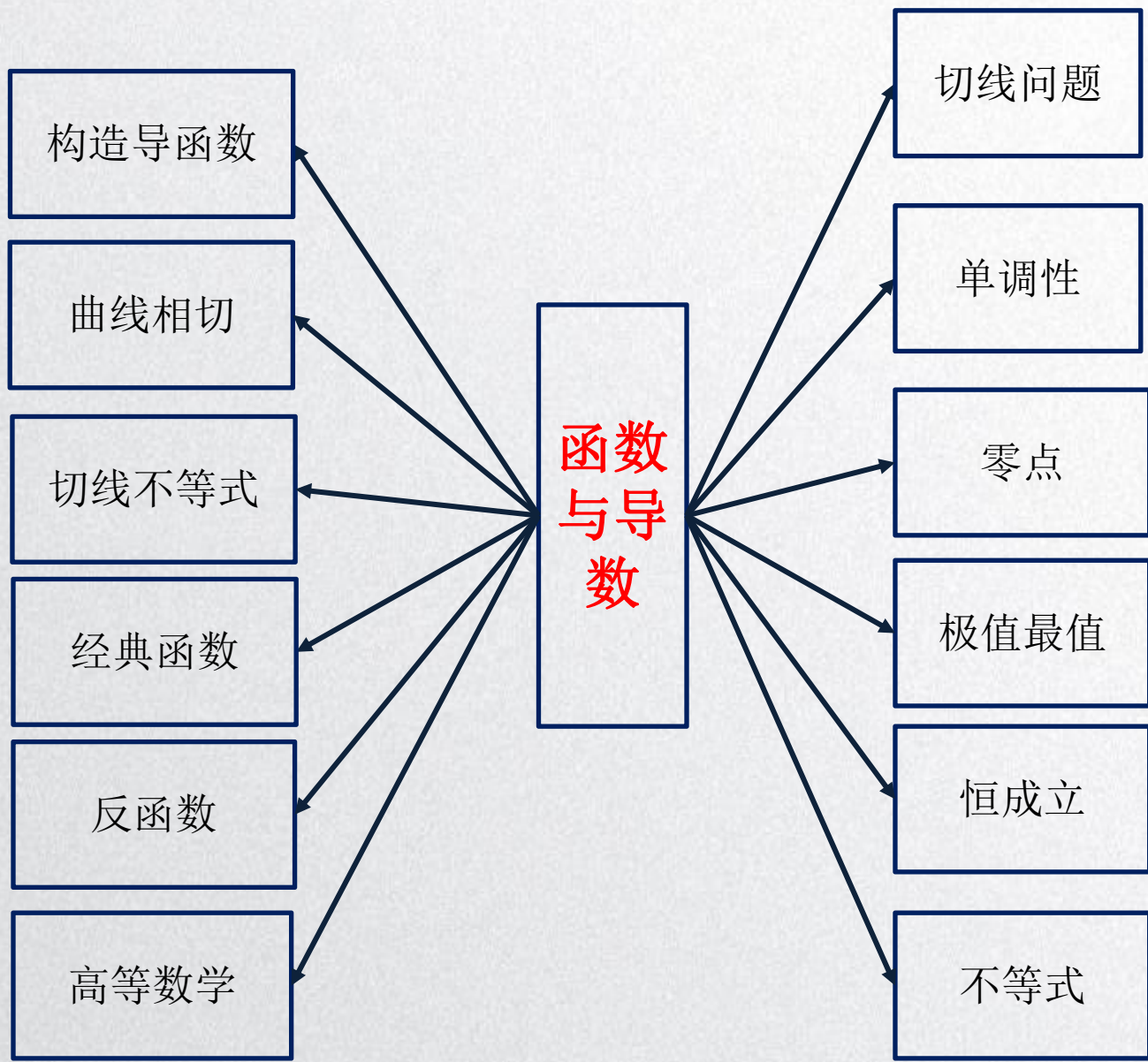
零点有关不等式

- 变形，构造函数难

极值点偏移问题

构造函数

拐点偏移问题



六、掌握基础：单调性与极值最值

(2023 年新课标全国 I 卷·第 19 题)已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$. ↵

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性; ↵

(2)证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$. ↵

(2023 年全国甲卷理科·第 21 题)已知函数 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ↵

(1)当 $a = 8$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性; ↵

(2)若 $f(x) < \sin 2x$ 恒成立, 求 a 的取值范围. ↵

七、突破切线问题

2022 新高考 1 15. 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是

_____.

2021 新高考 1 7. 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则 ()

A. $e^b < a$

B. $e^a < b$

C. $0 < a < e^b$

D. $0 < b < e^a$

(2022·新高考 II 卷 T14) 写出曲线 $y = \ln|x|$ 过坐标原点的切线方程: _____, _____.

(2021 年全国新高考 II 卷数学试题) 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|, x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点

$A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是

八、学会构造函数

(2018 年高考卷 III 第 21 题) 已知函数 $f(x) = (2+x+ax^2)\ln(1+x) - 2x$.

(1) 若 $a=0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

$$f(x) = (2+x+ax^2) \left[\ln(1+x) - \frac{2x}{2+x+ax^2} \right]$$

$$h(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x+ax^2}$$

$$h'(x) = \frac{x^2(a^2x^2 + 4ax + 6a + 1)}{(x+1)(2+x+ax^2)^2}$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$h'(x) = \frac{x^3(x-24)}{36(x+1)(2+x-\frac{1}{6}x^2)^2}$$

解答题特点

1. 导数不会从压轴题中消失，常规问题切线、极值最值，不等式切线放缩、极值点拐点偏移，恒成立反求参，级数不等式）、零点。研究零点用到不等式，证明不等式要用到零点。
2. 会更加频繁和数列、三角函数、不等式的结合。
3. 需要的技巧更多，比如同构、放缩、构造函数等方法的综合运用。
4. 背景泰勒展式或对数平均值不等式，反函数等
5. 处理的方法：分类讨论，分离参数，分割函数等。

