立体几何教学建议

新人教A版 必修二 P160页 例10

一重视教材
追根溯源

强化鳖臑、侧棱垂直（直角三棱锥）、对棱相等（等腰四面体）等特殊的三棱锥模型

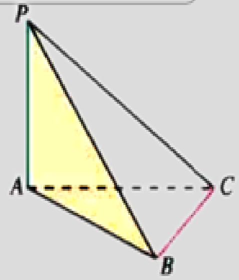


图 8.6-33

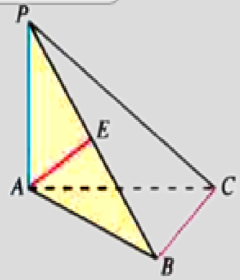


图 8.6-34

证明：如图 8.6-34，过点 A 作 $AE\perp PB$，垂足为 E.

$\because$ 平面 $PAB\perp$平面 PBC，平面 $PAB\cap$平面 $PBC=PB$，

$\therefore$ $AE\perp$平面 PBC.

$\because$ $BC\subset$平面 PBC，

$\therefore$ $AE\perp BC$.

$\because$ $PA\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，

$\therefore$ $PA\perp BC$.

又 $PA\cap AE=A$，

$\therefore$ $BC\perp$平面 PAB.

立体几何教学建议

二强化基础、融会贯通：

从今年新高考1.2卷及全国甲乙卷看立体几何，没有一个偏、难、怪的题目，更注重考查几何体的性质，小题主要考查：柱、锥、台从表面积到体积，从内置几何体到外置几何体，对于平面几何的知识也要格外重视。
大题主要考查平行、垂直，三角，三距
重基础，抓运算是关键

立体几何备考建议：

因立体几何的综合小题考查学生的推理论证能力，运算求解能力，空间想象能力，立体几何的小题压轴成为高考小题压轴的常见形式，

所以**实验班、特优班**在复习立体几何的小题要上难度，把球的问题，翻折变化求最值问题，截割变化问题，空间中的变化探研问题，面的扩充等重难点问题要让好学生练透。

立体几何教学建议

- 传统法加强（二面角线面角距离）对于“空间角的定义”，几何法在解决空间角度问题中也是不可或缺的途径，立体几何的核心是考察直观想象和空间思维，一味的强调空间向量，弱化定义的讲解，容易让学生过于依赖建系，只强化计算，禁锢思维“射影”等重要的概念，需要加强讲解，对于“**作证指求**”也应做相对应的训练，还要强化基本公式，表面积体积及计算的准确性。

立体几何教学建议

逐步培养学生的空间想象能力，使其熟悉直线与直线，直线与平面，平面与平面的空间位置关系的判定与性质。掌握柱、锥、台、球的相关知识。掌握向量运算的基本法则并能将其用于立体几何问题的求解。进而达到**能根据条件作出正确的图形，或能根据图形想象出直观形象；能正确地分析**出图形中基本元素及其相互关系；能对图形进行分解、组合；会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质。

—2022新高考Ⅱ卷立体几何考点分布（27分）（三个与体积有关）

（2022·新高考Ⅰ卷T4）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为140.0km^2；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为180.0km^2，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times10^9\text{m}^3$　B. $1.2\times10^9\text{m}^3$　C. $1.4\times10^9\text{m}^3$　D. $1.6\times10^9\text{m}^3$

（2022·新高考Ⅰ卷T8）已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　D. $[18,27]$

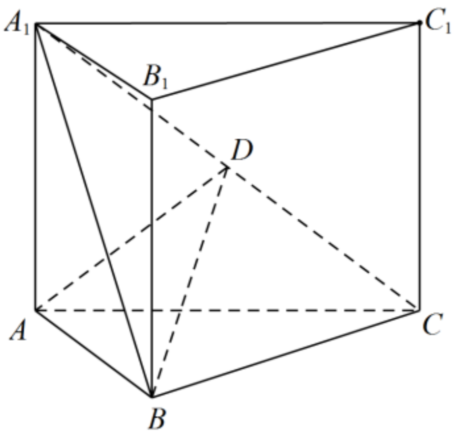
（2022 • 新高考Ⅰ卷T9）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线BC_1与DA_1所成的角为$90°$　B. 直线BC_1与CA_1所成的角为$90°$

C. 直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为$45°$　D. 直线BC_1与平面$ABCD$所成的角为$45°$

—2022新高考Ⅰ卷立体几何考点分布（27分）

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



【2.46】

（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

本题的命题背景是《九章算术》中的堑堵和鳖臑，特殊之处为本题是正方体的一半，即底面为等腰直角三角形的直三棱柱.

从考察内容上看，

第（1）问考查了三棱锥的体积公式以及等体积法的应用；

第（2）问考查了面面垂直的性质以及二面角的求解.

从设问形式上看，

第（1）问 一反常态，没有考查平行与垂直问题，因此导致部分基础不牢固的学生不知所措；

第（2）问看似中规中矩，却在建系的条件中设置障碍，导致部分同学盲目建系或对线段长度任意取值.

从计算量上看，本题的计算量不大，达到了“多想少算”的目的.

从平均分数上看，2021年立体几何平均5.77分，2022年立体几何平均2.48分，对于中低等水平学生的区分度很高.

考查了学生的直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养.

【解析】：（1）设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h.

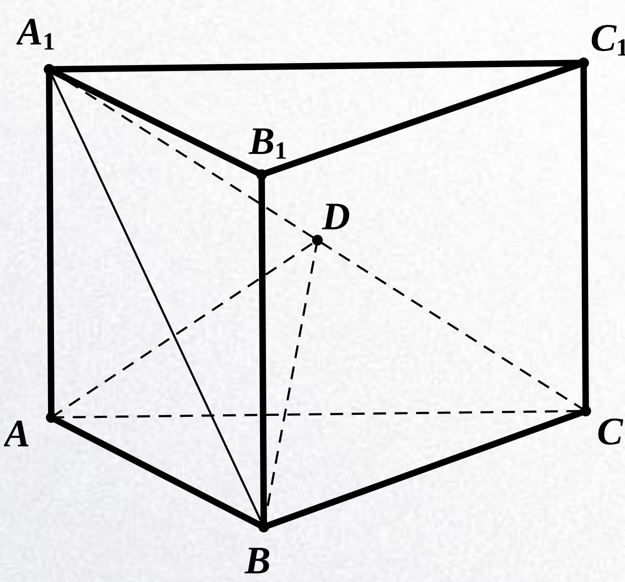
$$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AA_1\boxed{=\frac{1}{3}V_{A_1B_1C_1-ABC}=\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}}$$

..........2 分（2 分）

由 $V_{A_1-ABC}=V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\cdot h$

所以 $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\cdot h=\frac{4}{3}$，$\boxed{故h=\sqrt{2}}$

...........2 分（4 分）



所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$

得分点：体现 柱体体积是锥体体积的3倍 ……2分；

体现 距离为 $\sqrt{2}$ ……2分.

常见问题：写成 $V_{柱}=\frac{1}{3}S\cdot h=4$ 不得分；第一问建系得 0 分.

(2)第一步：证明 $BC\perp$平面ABB_1A_1

取 A_1B 的中点 E ,连接 AE .

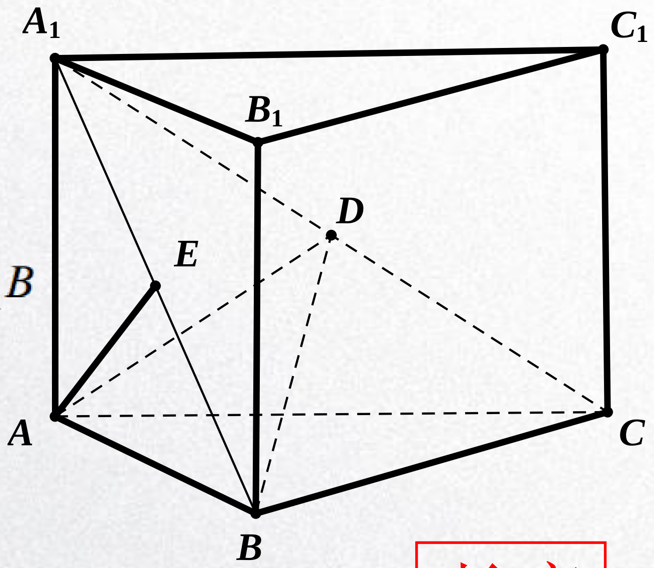
因为 $AA_1=AB$, 所以 $AE\perp A_1B$

又平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1 ,平面 $A_1BC\cap$平面 $ABB_1A_1=A_1B$

所以 $AE\perp$平面A_1BC， 所以 $AE\perp BC$

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$， 所以 $AA_1\perp BC$

因为 $AA_1\cap AE=A$,所以 $\boxed{BC\perp \text{平面} ABB_1A_1,}$…………2 分 （2分）



得分点：体现 $BC\perp$平面ABB_1A_1 即可.

题目核心

长度

建系

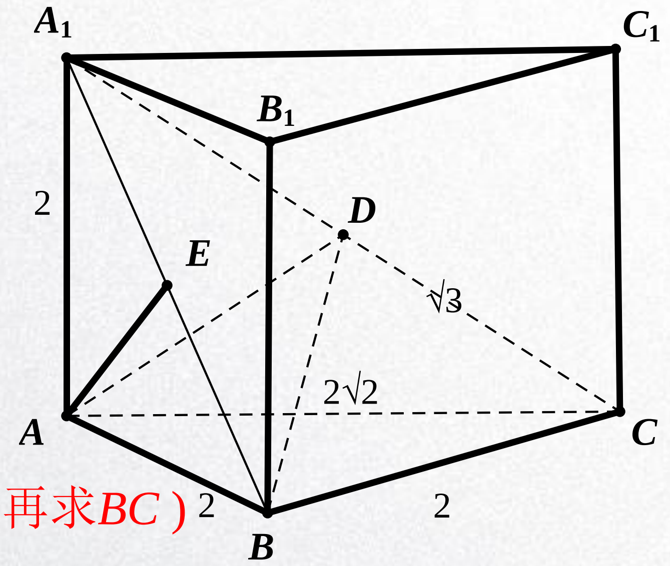
(2)第二步：得到 $BC=2$

法1： 因为 $BC\perp$ 平面ABB_1A_1，所以 $BC\perp AB$

又（1）可知 $AE=\sqrt{2}$,则 $AA_1=AB=2$

由 $V_{ABC-A_1B_1C1}=\frac{1}{2}AB\bullet BC\bullet AA_1=\frac{1}{2}\times 2\times BC\times 2=4$

所以 $\boxed{BC=2}$ ……2分(利用第一问距离求AB，再求BC)



法2： 因为 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AB$，设 $AA_1=AB=x$， $BC=y$，

常见问题：假设BC=2 0分；在图中详细标注线段长度BC=2 给2分

则 $\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot x=4\\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}x\cdot y=2\sqrt{2}\end{cases}$，解得 $x=y=2$，即 $AA_1=AB=BC=2$.

(利用已知体积和面积，求AB和BC)

(2)第三步：求二面角

法1：（向量法）

……1分（图中画出坐标系也给分；第一问建系，第二问没有建系过程的不给分）

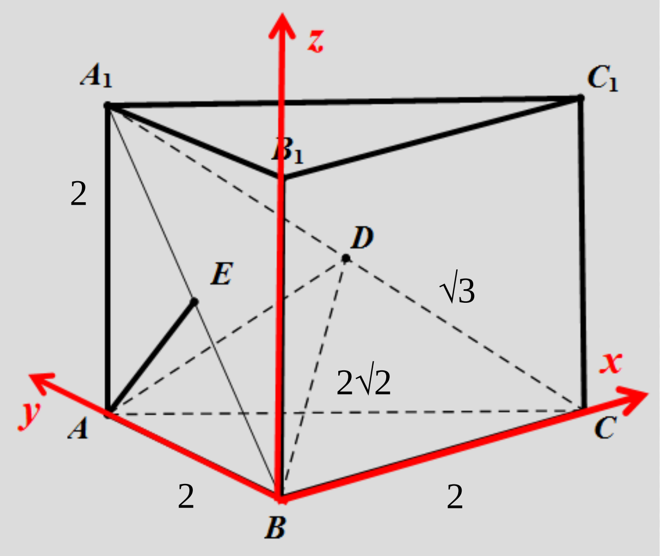
以 BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，BB_1 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

所以 $B(0,0,0),A(0,2,0),C(2,0,0),A_1(0,2,2),E(0,1,1),D(1,1,1)$

平面 BDC 的法向量 $\boxed{\overrightarrow{AE}=(0,-1,1)}$ ……1分

设平面 BDA 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z),\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，则 $\begin{cases}2y=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，所以 $\boxed{\boldsymbol{n}=(1,0,-1)}$ ……1分



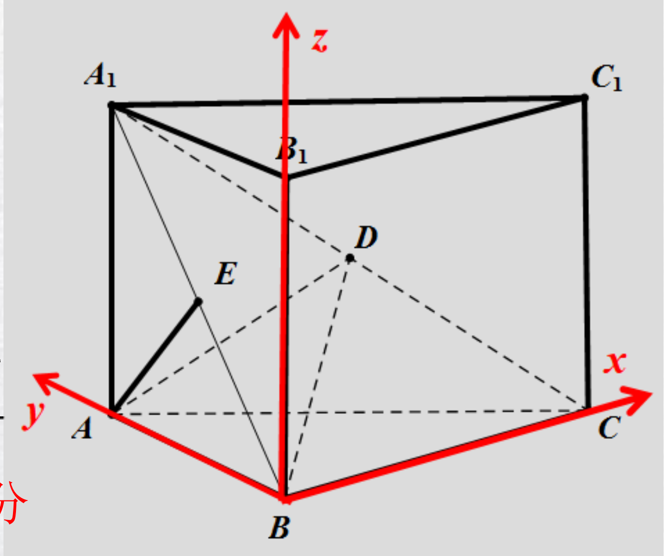
常见问题：BC长度错误，法向量正确与否都是0分；

(2)第三步：求二面角

法1：（向量法）

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{1}{2}$

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



……1分

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

常见问题：①角度错误：$\sin\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{1}{2}$ ②计算错误：$\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③建系错误：以AB、AC为 x、y轴

(2)第三步：求二面角

法2：（三垂线定理）

取 A_1B 中点 E，连接 AE，因为 $AA_1=AB$，

所以 $AE\perp A_1B$，又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，所以 $AE\perp$ 平面 A_1BC，

……1分

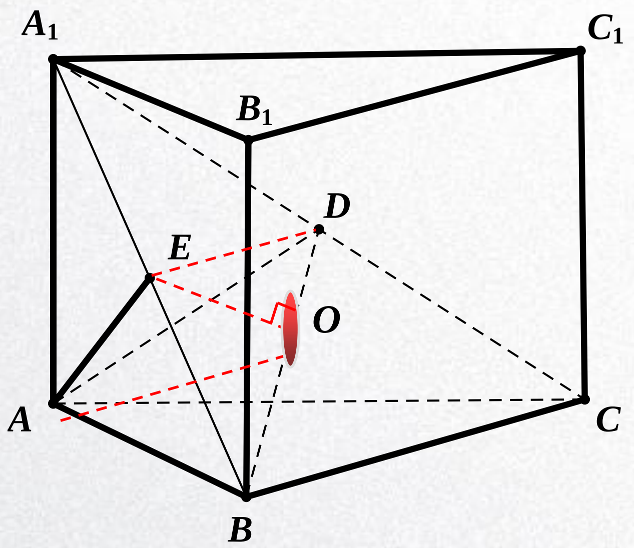
过 E 作 $EO\perp BD$ 于 O，连接 ED， AO

（亦可作 $AO\perp BD$，连接 EO， ED）

由三垂线定理可知，$AO\perp BD$（亦或 $EO\perp BD$），……1分

由二面角定义可知，$\angle AOE$ 即为二面角 $A-BD-A_1$ 的平面角，

也是二面角 $A-BD-C$ 的补角，两者正弦值相等，……1分



作→证→指→求

(2)第三步：求二面角

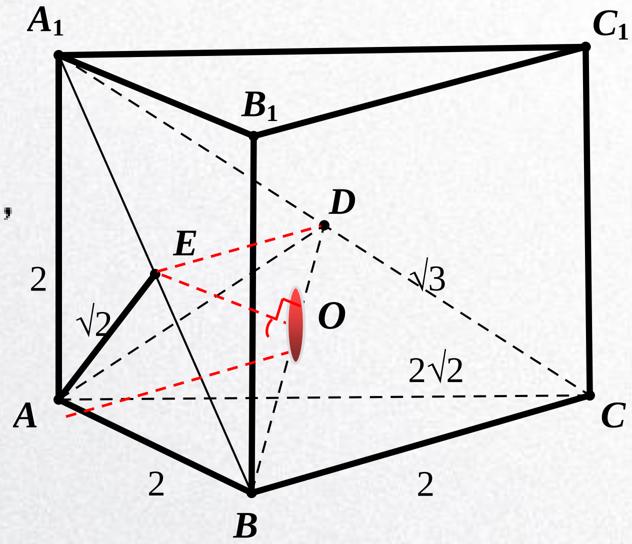
法2：（三垂线定理）

$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EO=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot ED$（或利用$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle A_1BC}$），

$BD=\frac{1}{2}A_1C=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{3}$,

$BE=\frac{1}{2}A_1B=\sqrt{2}$, $ED=\frac{1}{2}BC=1$,

所以$EO=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$AO=\sqrt{AE^2+EO^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\boxed{\sin\angle AOE=\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ……1分



(2)第三步：求二面角

法3：（射影面积）

取 A_1B 中点 E，连接 AE，因为 $AA_1=AB$，

所以 $AE\perp A_1B$，又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

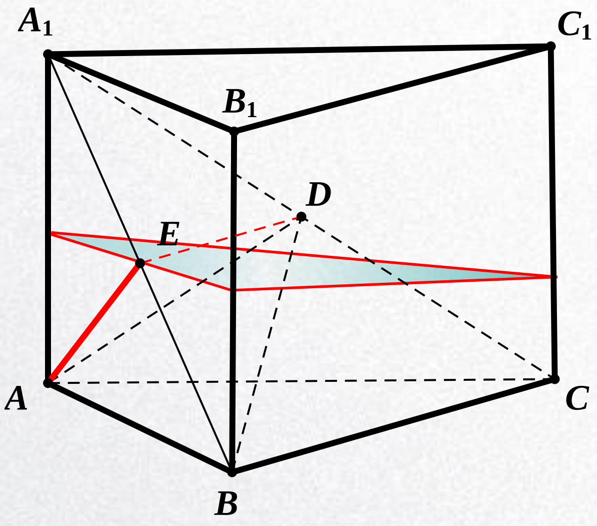
平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，所以 $\boxed{AE\perp \text{平面 } A_1BC}$，

因此 $\triangle ABD$ 在平面 A_1BC 上的射影为 $\triangle EBD$， ·······1分

$\boxed{S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle A_1BC}}$，$\boxed{S_{\triangle EBD}=\frac{1}{4}S_{\triangle A_1BC}}$，(亦可求出具体数值) ·······每个面积各1分

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 α，$|\cos\alpha|=\frac{S_{\triangle EBD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{1}{2}$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的 $\boxed{\text{正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}}$. ·······1分



(2)第三步：求二面角

法4：（二面角定义1）

取 A_1B 中点 E，连接 AE，因为 $AA_1 = AB$，

所以 $AE \perp A_1B$，又平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，

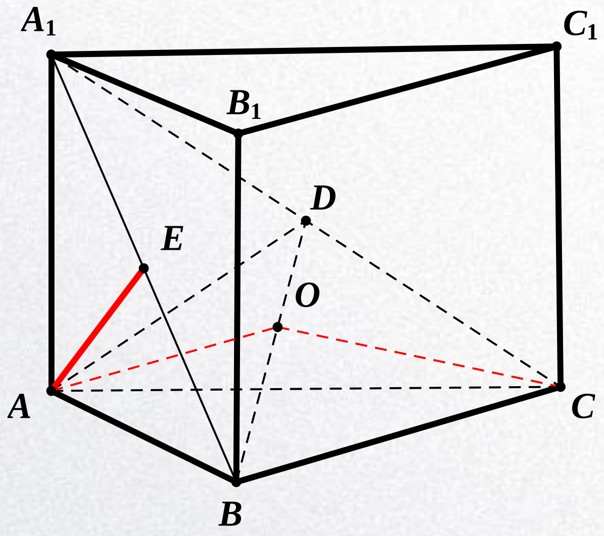
平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$，所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC，

过 A 作 $AO \perp BD$ 于 O，连接 CO，

因为 $AD = CD$，$AB = BC$，所以 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$，

……2分

所以 $CO \perp BD$，



(2)第三步：求二面角

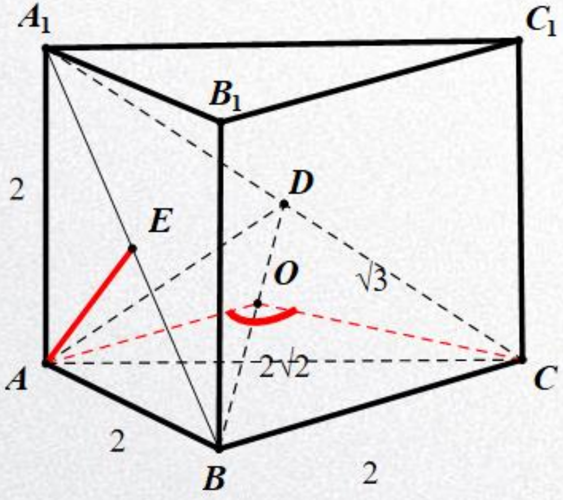
法4：（二面角定义1）

故$\angle AOC$为二面角$A-BD-C$的平面角， ········1分

$AO=CO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$， $AC=2\sqrt{2}$，

由余弦定理可知$\cos\angle AOC=-\dfrac{1}{2}$，

所以二面角$A-BD-C$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ········1分



(2)第三步：求二面角

法5： （二面角定义2）

过点 A 作 $AO \perp BD$ 于 O，

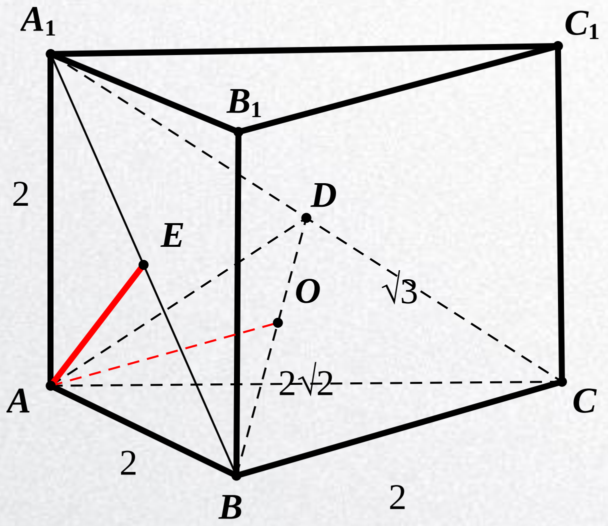
由(1)知，点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$，

点 A 到二面角 $A-BD-C$ 的棱 BD 的距离为 AO，

由 $AB=2$， $AD=BD=\sqrt{3}$，易知 $AO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

故 $\dfrac{d_{A\to A_1BC}}{d_{A\to BD}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



新人教A版 必修二 P160页 例10

①回归课本 追根溯源

强化鳖臑、侧棱垂直（直角三棱锥）、对棱相等（等腰四面体）等特殊的三棱锥模型

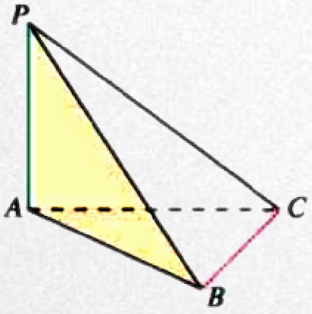


图 8.6-33

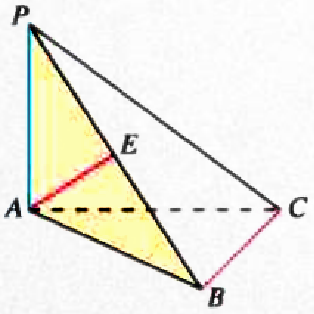


图 8.6-34

证明：如图 8.6-34，过点 A 作 $AE\perp PB$，垂足为 E.

$\because$ 平面 $PAB\perp$平面 PBC，平面 $PAB\cap$平面 $PBC=PB$，

$\therefore$ $AE\perp$平面 PBC.

$\because$ $BC\subset$平面 PBC，

$\therefore$ $AE\perp BC$.

$\because$ $PA\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，

$\therefore$ $PA\perp BC$.

又 $PA\cap AE=A$，

$\therefore$ $BC\perp$平面 PAB.

②打通脉络，具备常识

选择题T5中涉及到互质的小学概念，

本题中涉及等底等高的柱体体积是锥体体积的3倍，同属于小学概念；

而很多学生不具备数学基本常识，在后续的复习中，应打破壁垒，打通脉络，比如：

（小学）余数，质数合数，单位换算，内积等于外积，最大公约数，最小公倍数，最简分数（既约分数）等；

（初中）有理数，科学记数法，算术平方根，立方和（差）公式，因式分解，二次函数，三线八角，外角，相似和全等，等腰三角形性质，三角形四心，梯形中位线，多边形内角和，圆内接四边形，圆幂定理等.

③解题动机，条件分析

培养学生深入发掘条件的能力，而非惯性思维、生搬硬套。

本题第一问条件中，围绕体积和面积展开描述，问题中又涉及距离，此处利用等积法的动机已经非常强烈了.

第二问条件中，围绕等腰和面面垂直展开描述，两个条件都在提示利用等腰三角形三线合一（正方形对角线）

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$．(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离；

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

④定义深化，双向通行

从本题第二问的方法中，我们不难发现<u>几何法</u>在解决空间角度问题中也是不可或缺的途径，立体几何的核心是考察直观想象和空间思维，一味的强调空间向量，弱化定义的讲解，容易让学生过于依赖建系，只强化计算，禁锢思维，尤其在已知条件中涉及有关线面角和二面角的内容时，学生无从下手，因此在备考过程中，对于“空间角的定义”，“射影”等重要的概念，需要加强讲解，对于“作证指求”也应做相对应的训练.

⑤规范答题，表述合理

第一：牢记建立右手系，写清楚建系过程，且最好严谨证明建系过程，务必在答题卡图形上画出坐标系.

第二：证明的步骤不能省略或者简写，有些学生由面面垂直，直接得到线线垂直，省略了最关键的线面垂直造成失分；有很多同学得到了BC与AB的长度关系，只写出了AB，只用AB表示了BC，没有直接给出BC数值，造成了丢分.

第三：如果有些条件没有严谨的证明出来，也要大胆的做好猜想，大胆的往下写，得分点之间很大几率是相互独立的，所以某一步骤不严谨不影响后面的计算，要具备坦然无畏的心态.

—2022新高考卷立体几何考点分布（27分）（三个与体积有关）

（2022·新高考 I 卷 T4）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔148.5m 时，相应水面的面积为140.0km²；水位为海拔157.5m 时，相应水面的面积为180.0km²，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m 上升到157.5m 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times10^9\,m^3$　B. $1.2\times10^9\,m^3$　C. $1.4\times10^9\,m^3$　D. $1.6\times10^9\,m^3$

（2022·新高考 I 卷 T8）已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　D. $[18,27]$

（2022 • 新高考 I 卷 T9）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

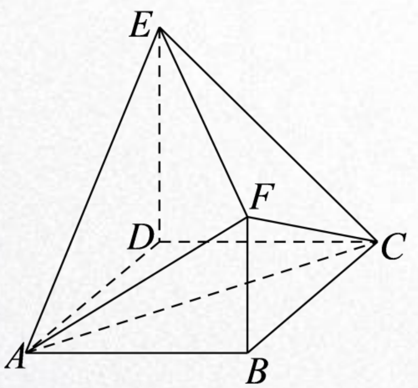
2022新高考Ⅱ卷立体几何考点分布（22分）

7. 正三棱台高为1，上下底边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则球的表面积是（）

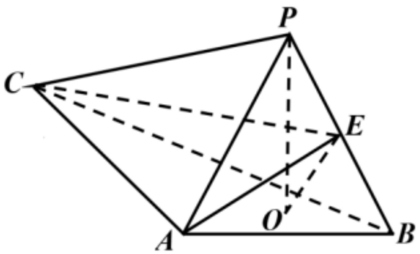
A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

（2022·新高考Ⅱ卷 T11） 如图，四边形$ABCD$为正方形，$ED\perp$平面$ABCD$，$FB// ED, AB=ED=2FB$，记三棱锥$E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$的体积分别为V_1,V_2,V_3，则（　　）

A. $V_3=2V_2$　　B. $V_3=2V_1$　　C. $V_3=V_1+V_2$　　D. $2V_3=3V_1$



20. 如图，PO是三棱锥$P-ABC$的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E是PB的中点．



（1）求证：$OE//$平面PAC；

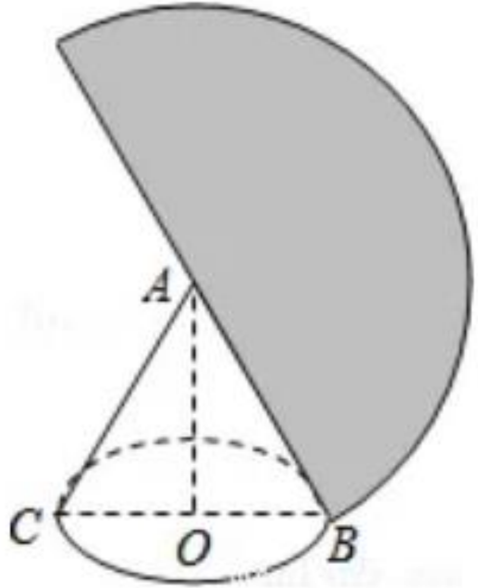
（2）若$\angle ABO=\angle CBO=30°$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角$C-AE-B$的正弦值．

2022高考立体几何小题分析 圆锥概念

视角1：基础知识考查

（2021年新高考Ⅰ卷3）已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A.2　　B. $2\sqrt{2}$　　C.4　　D. $4\sqrt{2}$



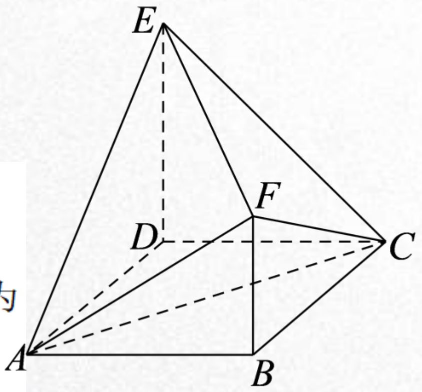
公式、性质应用，画直观图.

2022高考立体几何 典例分析1，多面体体积

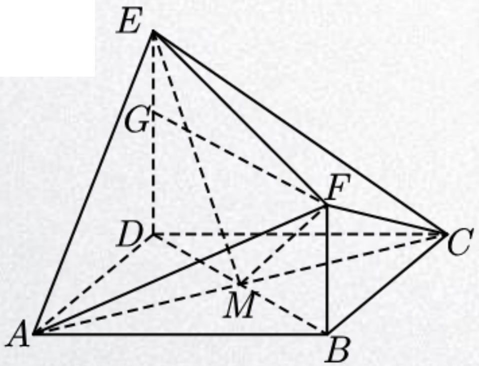
视角1：基础知识考查

（2022·新高考Ⅱ卷 T11） 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB/\!/ED, AB=ED=2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 的体积分别为 V_1,V_2,V_3，则（　　）

A. $V_3=2V_2$　　B. $V_3=2V_1$　　C. $V_3=V_1+V_2$　　D. $2V_3=3V_1$



$$V_3=V_{A-EFM}+V_{C-EFM}=\frac{1}{3}AC\cdot S_{\triangle EFM}$$



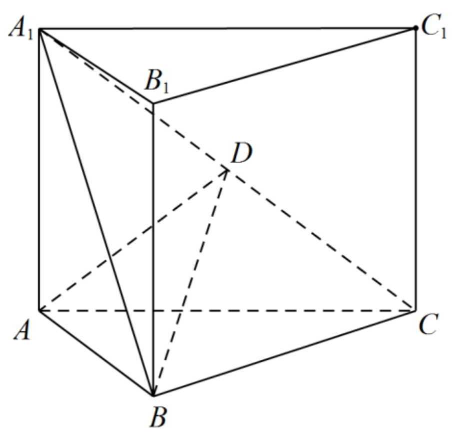
公式、性质应用，画直观图.

2022高考立体几何 典例分析1，多面体体积

视角1：基础知识考查

（2022·新高考Ⅰ卷T19）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$．

（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；



$$V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$$

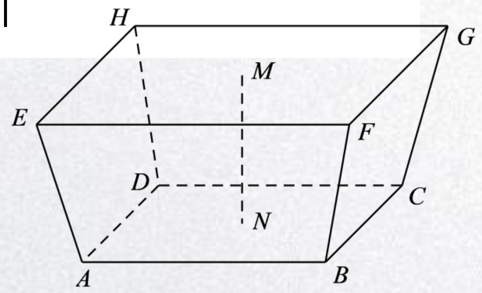
公式、性质应用，画直观图.

2022高考立体几何 典例分析1，多面体体积

（2022·新高考Ⅰ卷T4）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔$148.5\mathrm{m}$时，相应水面的面积为$140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔$157.5\mathrm{m}$时，相应水面的面积为$180.0\mathrm{km}^2$，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔$148.5\mathrm{m}$上升到$157.5\mathrm{m}$时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times10^9\mathrm{m}^3$　B. $1.2\times10^9\mathrm{m}^3$　C. $1.4\times10^9\mathrm{m}^3$　D. $1.6\times10^9\mathrm{m}^3$

$$V=\frac{1}{3}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$$



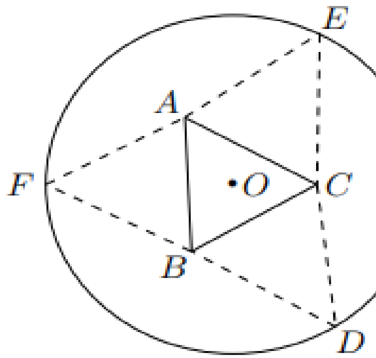
（阅读能力、分析能力、抽象能力，情境，台体体积，估算）

典例分析

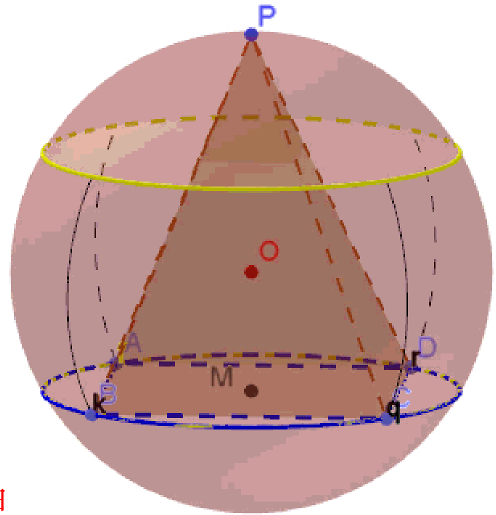
（2022·新高考Ⅰ卷 T8） 已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\dfrac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

16. 如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5 cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D, E, F 为圆 O 上的点，$\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后，分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC$, $\triangle ECA$, $\triangle FAB$，使得 D, E, F 重合，得到三棱锥. 当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为______.



相似：2017年全国1卷理



典例分析

（2022·新高考Ⅰ卷T8） 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\dfrac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

方法一：由球的体积为 36π，所以球的半径 $R=3$，

设正四棱锥的底面边长为 $2a$，高为 h，

则 $l^2=2a^2+h^2$，$3^2=2a^2+(3-h)^2$，

所以 $6h=l^2$，$2a^2=l^2-h^2$

l 的范围是已知的，故而可以转化成关于 l 的函数

所以正四棱锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times 4a^2\times h=\dfrac{2}{3}\times(l^2-\dfrac{l^4}{36})\times\dfrac{l^2}{6}=\dfrac{1}{9}\left(l^4-\dfrac{l^6}{36}\right)$

典例分析

（2022·新高考Ⅰ卷 T8） 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

解：方法二：设 $\angle APO=\theta$，则 $l=2\cdot 3\cos\theta$

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 2AO_1\times PO_1=\frac{2}{3}\times(l\sin\theta)^2\times l\cos\theta=144\sin^2\theta\cos^4\theta$$

令 $f(\theta)=144\sin^2\theta\cos^4\theta$，则 $f'(\theta)=288\sin\theta\cos^3\theta(1-3\sin^2\theta)$，

可得当 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$l=2\sqrt{6}\in[3,3\sqrt{3}]$，此时 $f_{\max}(\theta)=\frac{64}{3}$

又 $l=3$ 时，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$V=\frac{27}{4}$，

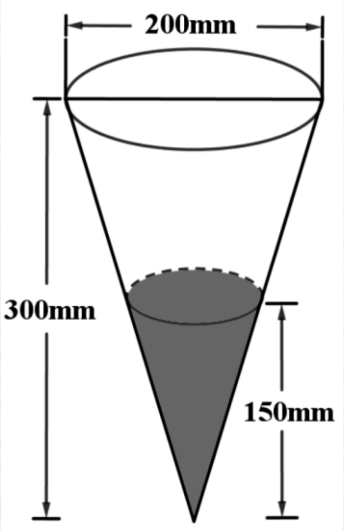
当 $l=3\sqrt{3}$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，$V=\frac{81}{4}$，

所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

视角2：基础+情境、文化、阅读

（2021年北京卷8） 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm-25mm），大雨（25mm-50mm），暴雨（50mm-100mm），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（　　）．

A. 小雨；　B. 中雨；　C. 大雨；　D. 暴雨



圆柱、圆锥的体积

画直观图
公式应用

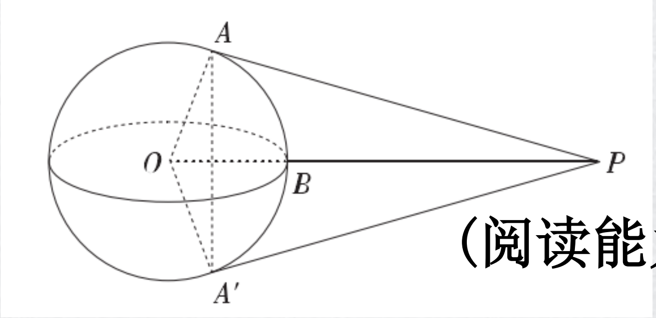
视角2：基础+材料阅读

画直观图、公式应用

（2021年新高考Ⅱ卷4）北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果．在卫星导航系统中，地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为36000km（轨道高度是指卫星到地球表面的距离）．将地球看作是一个球心为O，半径r为6400km的球，其上点A的纬度是指OA与赤道平面所成角的度数．地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星点的纬度最大值为α，记卫星信号覆盖地球表面的表面积为$S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$（单位：km²），则S占地球表面积的百分比约为（　　）

A. 26%　　B.　　D. 50%

球冠的面积公式$S=2\pi rh$

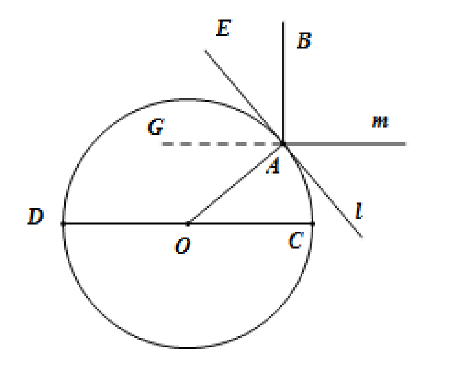


（阅读能力、分析能力、抽象能力）

视角2：基础+情境文化阅读

（2020·新高考Ⅰ卷 T4）日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面.在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为（　　）

A. 20°　　　B. 40°　　　C. 50°　　　D. 90°



画直观图
性质应用

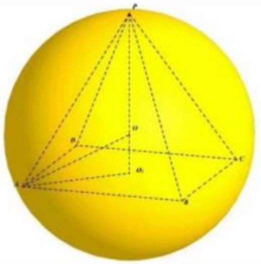
视角3：球的性质综合

（2022·新高考Ⅱ卷 T7）正三棱台高为 1，上下底边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则球的表面积是（　　）

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

（2022·新高考Ⅰ卷 T8） 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3 \le l \le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$



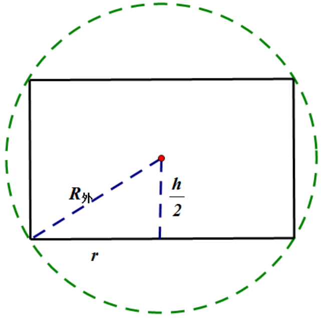
策略一：大圆法　（抓取成镜面对称的几何体的“中垂面”）

画直观图、体积公式、垂直关系的判定

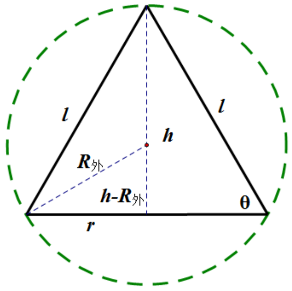
视角3：球的性质综合

策略二：三个经典模型（抓取“轴截面”）

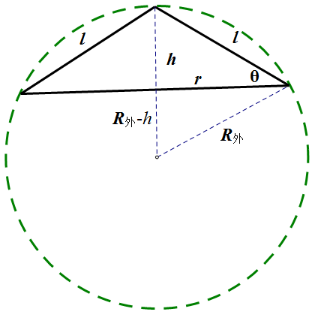
圆柱模型；圆锥模型；圆台模型



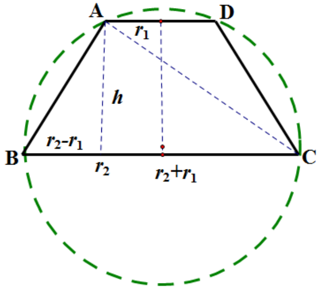
圆柱的轴截面



圆锥的轴截面（1）



圆锥的轴截面（2）



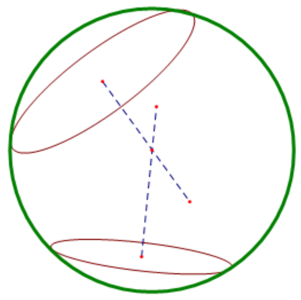
圆台的轴截面

策略三：小圆法

（1）类比圆中（垂径定理找圆心）情形，利用球的**截面性质**

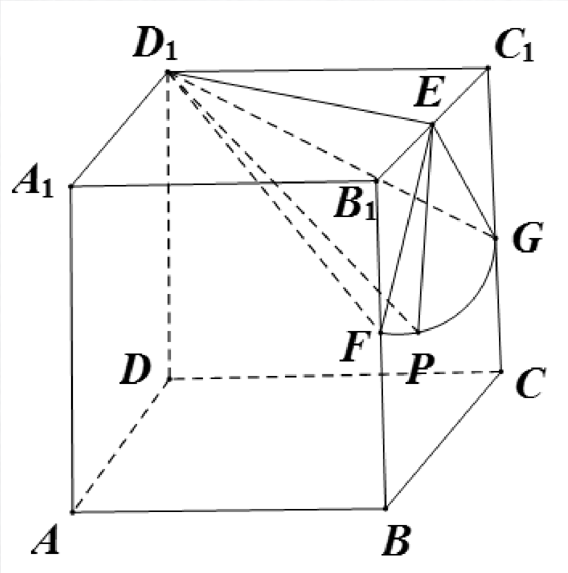
（过截面圆心且与截面垂直的直线必过球心）锁定球心.

（2）往往适用于多面体**某些面的外接圆圆心位置较明确**时.



视角3：球的切、接、交问题

（2020年新高考Ⅰ卷16）已知直四棱柱ABCD–A1B1C1D1的棱长均为2，∠BAD=60°．以D_1为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面BCC_1B_1的交线长为__________.



扇形 EFG 的弧 $\overset{\frown}{FG}$

画直观图
球的性质
弧长公式

视角4：位置关系+空间角

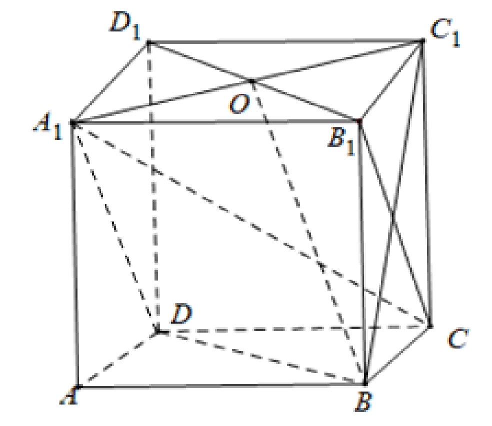
（2022·新高考Ⅰ卷 T9） 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

画直观图

几何法、向量法



视角5：动点+平行、垂直关系的判定

（2021年新高考Ⅰ卷12）

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0，1]$，$\mu\in[0，1]$，则（　　）

A．当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B．当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C．当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

D．当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

分析：本题以正三棱柱为载体，考查立体几何中的热点——动点问题、翻折问题。试题背景平和，但综合性强，融立体几何、平面几何、向量等于一体，既基础，又综合，还兼具创新性，涉及到定值问题的证明以及探索符合题意的动点P的个数。考生必须综合运用平面向量的知识、立体几何的知识、平面几何的知识才能顺利解答，真正体现了高考评价体系提出的基础性、综合性、应用性、创新性要求，是一道不折不扣的好题。

高考试题分析与命题趋势

21新 12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

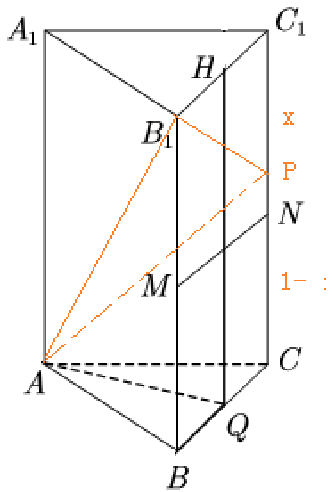
A. 当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

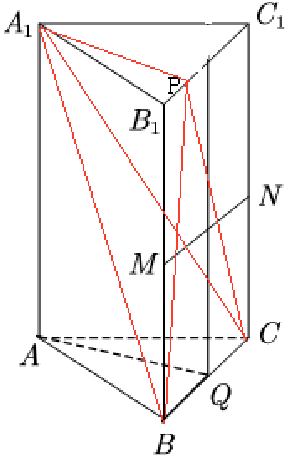
C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

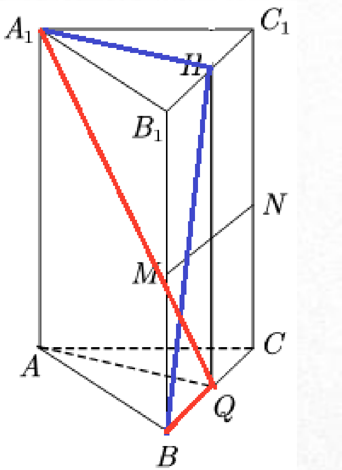
D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

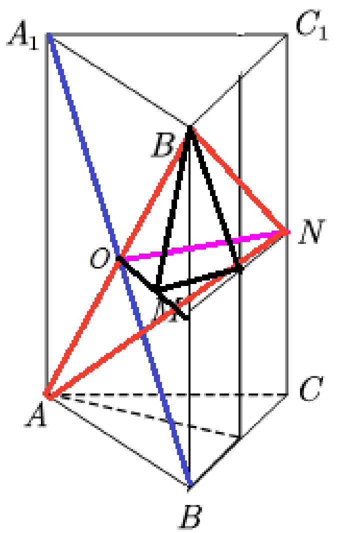
【答案】BD



$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1-x)^2}$?







命题趋势与备考建议：

在立体复习中“三垂线定理”“射影长定理”“三余弦定理”等在课本中已经删除，但又常用定理方法要回归，要强化。