基于HPM视角下的“学”和课程视域下的“练”

均值不等式作业设计

高三数学　李　晗

学科核心素养只有走进高考，才更容易走进课堂，从而在教学中落到实处。因此，本节作业设计紧紧围绕**高考怎么考**、**新知怎么学**、**习题怎么练**为主线展开。

考-学衔接，学-练衔接

目录

CONTENTS

高考考什么、怎么考

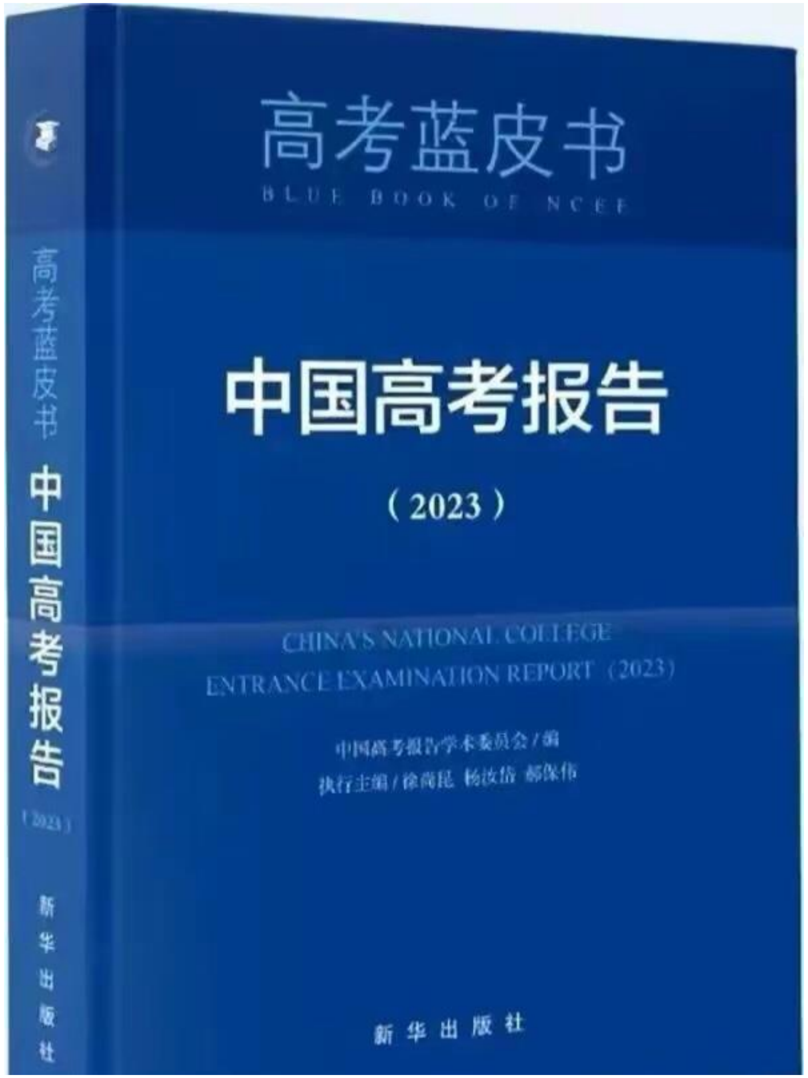
《中国高考评价体系》主要由**“一核”**、**“四层”**、**“四翼”**三部分内容组成，分别从高考的核心功能、考察内容、考察要求三方面回答**“为什么考、考什么、怎么考”**。

“培养什么人、选拔什么人”

《新课标》明确指出：通过高中数学课程的学习，学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的数学**基础知识**、**基本技能**、**基本思想**、**基本活动经验**（简称“四基”）；提高从数学角度**发现问题**、**提出问题**、**分析问题**、**解决问题**

会用数学的眼光观察现实世界
会用数学的思维思考现实世界
会用数学的语言表达现实世界

高考怎么考



《2023中国高考报告》指出2023年高考数学将要加入**复杂的情境**，强调数学思维和方法的考察。高考试题呈现“**无价值，不入题；无思维，不命题；无情境，不成题**”的特征。

通过以上分析不难看出，新高考对学生的数学思维和能力要求更高，新高考选拔的不是**解题的高手，而是解决问题的高手**，不是单纯的**会应用数学家结论**，**而是选拔富有数学家思维、创新能力**的人。

在注重思维和能力的新高考背景下，本节均值不等式该怎么学？

根据新版课程标准，对均值不等式要求学生**学会并掌握均值不等式以及成立的条件；理解均值不等式的几何意义；能用均值不等式解决实际问题中的最值问题；能用均值不等式证明简单的不等式。**所涉及的主要核心素养有：数学抽象、数学运算、逻辑推理、数学建模。均值不等式，既以不等式性质为基础延伸，又能与函数、导数、圆锥曲线等知识相结合，起到了承上启下的作用，是高考的重要考查内容。

数学家Hardy在其著作《不等式》中说："要追寻一个大家熟悉的不等式的起源常常是困难的，它可能是一篇几何或者天文学论文中作为一个辅助命题的形式首次出现。"可见，不等式最初来源于具体实际问题的解决。

HPM视角下学习不等式更有利

HPM：即数学史融入数学教学

HPM视角不是把数学史作为教学点缀，而是基于德国生物学家海克尔的生物学发生定律（个体发育史是种族发育史的再发生），学生在数学知识的发现和探究中存在的认知障碍，处理困难的方式和解决问题的能力和历史上数学家是相似的，学生对数学知识的认知和理解也无法摆脱人类对数学的探索和认知规律。因此，重设问题的数学史情境，回归问题本源，学生在本源问题解决的过程中，培养数学思维，把握知识本质，而不是单纯记住结论。

新知怎么学

教材	章节	引入方式
人教A版	均值不等式	用赵爽的弦图发现四个直，角三角形的面积小于正方形的面积，进而化简得到不等式。
人教B版	均值不等式	只给出相关概念，在实验的的基础上归纳，猜想，证明
沪教版	均值不等式	直接给出均值不等式，用代数法证明，用赵爽的弦，图加以解释。
苏教版	均值不等式	用物体放在不等臂天平上，测量的例子引，和算术均值比较大小得到不等式出几何均值

不同版本的教材都没有直接给出均值不等式的内容，**而是更重视呈现知识的历史来源**

新知怎么学

各类中项等周问题 → 两个正数的均值不等式 → 三个正数的均值不等式 → n个正数的均值不等式

半圆模型 → 弦图模型 → 和差术

探索与研究

如图 2-2-7 所示的半圆中，AB 为直径，O 为圆心．已知 $AC=a$，$BC=b$，D 为半圆上一点，且 $DC\perp AB$，算出 OD 和 CD，给出均值不等式的另一个几何意义．

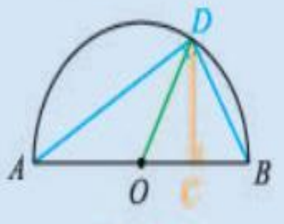


图 2-2-7

1. 平均值不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正实数，记 $H_n=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$，$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

$G_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，它们分别称为 n 个正数的调和平均数、几何平均数、算术平均数、平方平均数，

则有如下关系：$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$．等号成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$．

对标课堂和高考，作业应当怎么练？

五年高考考点分析

试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新高考全国I	2022年	18	解答题	正弦定理边角互化的应用；基本不等式求和的最小值；	解三角形	12分
	2021年	5	单选	基本不等式求积的最大值；椭圆定义及辨析	解析几何	5分
	2020年	11	多选	基本（均值）不等式的应用		5分

（2020•新高考Ⅰ）已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则（　　）

A. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2a+\log_2b\geqslant-2$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

五年高考考点分析

试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新高考全国I	2022年	18	解答题	正弦定理边角互化的应用；基本不等式求和的最小值；	解三角形	12分
	2021年	5	单选	基本不等式求积的最大值；椭圆定义及辨析	解析几何	5分
	2020年	11	多选	基本（均值）不等式的应用		5分

（2021•新高考Ⅰ）已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为（　　）

A．13　　B．12　　C．9　　D．6

五年高考考点分析

试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新高考全国I	2022年	18	解答题	正弦定理边角互化的应用；基本不等式求和的最小值；	解三角形	12分
	2021年	5	单选	基本不等式求积的最大值；椭圆定义及辨析	解析几何	5分
	2020年	11	多选	基本（均值）不等式的应用		5分

（2022•新高考Ⅰ）记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B；

（2）求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

每年都考

题型多样化，

命题情境复杂化，

综合思维量越来越大

五年高考考点分析

试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新高考全国II	2022年	12	多选	由已知条件判断所给不等式是否正确；条件等式求最值；		
	2021年					
	2020年	12	多选	基本（均值）不等式的应用		

（2022•新高考 II）若 x， y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A．$x+y\leqslant 1$　　B．$x+y\geqslant -2$　　C．$x^2+y^2\leqslant 2$　　D．$x^2+y^2\geqslant 1$

试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新课标Ⅰ理科	2019年	23	解答题	三元基本（均值）不等式；综合法；基本不等式实际应用；		
	2018年	16	填空题	三角函数，由导数求函数的最值	三角函数	优解
	2017年					
试卷	年份	题号	题型	知识点分布	命题背景	备注
新课标II理科	2019年	21	解答题	轨迹问题——椭圆；求直线与椭圆的交点坐标；求椭圆中的弦长；椭圆中三角形（四边形）的面积；	解析几何	优解
	2018年					
	2017年	23	解答题	柯西不等式，基本不等式应用		

思维水平层层递进

单点知识结构水平 → 多点知识结构水平 → 关联知识结构水平 → 拓展知识结构水平

1．下列说法正确的是（　）

A．函数 $y=\sin x+\frac{1}{s}$

B．若 $x>0$，$y>0$

C．若对 $\forall x\in(0,+\infty)$

D．若 $x<\frac{1}{2}$，则 $2x+\frac{}{2x-1}$ 的最大值是 -1

3. 已知 $x>-1$，则函

7．加斯帕尔•蒙日（图 1）是 18～19 世纪法国著名的几

两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上,其圆心是椭

知长方形 R 的四边均与椭圆 $C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切,则下列说

图1

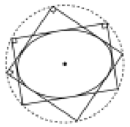


图2

A．椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．椭圆 C 的蒙

C．椭圆 C 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=9$　　D．长方形 R 的面积最大值为 18

10.（1）已知 $a>0,b>0$，且 $a\neq b$，证明：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$；

（2）若 $f(x)=e^x-mx$，且 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的两个不同的零点，应用（1）的结论证明：$x_1+x_2>2$.

基础性　　应用性　　综合性　　创新性

基础题　　提高题　　拓展题

基础题

1．下列说法正确的是（　）

A．函数 $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 的最小值为 2

B．若 $x>0$，$y>0$，$x+y=1$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 最小值为 4

C．若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\dfrac{1}{x}\geq m$ 恒成立，则实数 m 的最大值为 2

D．若 $x<\dfrac{1}{2}$，则 $2x+\dfrac{1}{2x-1}$ 的最大值是 -1

2．若 $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{7}{5}$，则 $y=(3x-2)(7-5x)$ 的最大值为________．

3．已知 $x>-1$，则函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ 的最大值为________．

4．函数 $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{4}{\cos^2 x}$ 的最小值是______

5．（多选）已知 $a,b\in\mathrm{R}$，$a>0,b>0$，且 $a^2-2ab-3b^2=1$，则（　）

A．$a+b$ 有最小值 1　　B．$a-b$ 有最小值 1

C．$3a+5b$ 有最小值 $2\sqrt{2}$　　D．$3a-5b$ 有最小值 $2\sqrt{2}$

（2020•新高考Ⅰ）已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则（　）

A．$a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$　B．$2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$　C．$\log_2 a+\log_2 b\geqslant-2$　D．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

（2022•新高考Ⅱ）若 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　）

A．$x+y\leqslant1$　B．$x+y\geqslant-2$　C．$x^2+y^2\leqslant2$　D．$x^2+y^2\geqslant1$

1、【知识】：均值不等式等号成立条件，基本拆、拼、凑
2、【能力】：考查了学生分析问题与解决问题的能力
3、【素养】：考查学生逻辑推理、数学运算的核心素养
4、 重点突出体现“四翼”中的基础性、应用性原则

提高题

6．在ΔABC中，点F为线段BC上任一点（不含端点），若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+3y\overrightarrow{AC}$，则$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为（　　）

A．12　　B．6　　C．8　　D．9

7．加斯帕尔•蒙日（图1）是18～19世纪法国著名的几何学家,他在研究圆锥曲线时发现:椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上,其圆心是椭圆的中心,这个圆被称为“蒙日圆”(图2)．已知长方形R的四边均与椭圆$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$相切,则下列说法正确的是（　）


图1

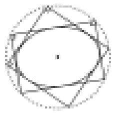
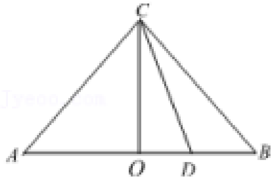


图2

A．椭圆C的离心率为$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．椭圆C的蒙日圆方程为$x^2+y^2=6$

C．椭圆C的蒙日圆方程为$x^2+y^2=9$　　D．长方形R的面积最大值为18

8．数学里有一种证明方法叫做*Proofs without words*，也称之为无字证明，一般是指仅用图象语言而无需文字解释就能不证自明的数学命题，由于这种证明方法的特殊性，无字证明被认为比严格的数学证明更为优雅．现有如图所示图形，在等腰直角三角形ΔABC中，点O为斜边AB的中点，点D为斜边AB上异于顶点的一个动点，设$AD=a$，$BD=b$，则该图形可以完成的无字证明为（　　）



A．$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　B．$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

C．$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$　　D．$a^2+b^2\geqslant2\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

9.某单位为了激励员工努力工作，决定提高员工待遇，给员工分两次涨工资，现拟定了三种涨工资方案，

甲：第一次涨幅$a\%$，第二次涨幅$b\%$；

乙：第一次涨幅$\frac{a+b}{2}\%$，第二次涨幅$\frac{a+b}{2}\%$；

丙：第一次涨幅$\sqrt{ab}\%$，第二次涨幅$\sqrt{ab}\%$.

其中$a>b>0$，小明帮员工李华比较上述三种方案得到如下结论，其中正确的有（　）

A．方案甲和方案乙工资涨得一样多　　B．采用方案乙工资涨得比方案丙多

C．采用方案乙工资涨得比方案甲多　　D．采用方案丙工资涨得比方案甲多

1、【知识】：具体情境考察均值不等式的应用

2、【能力】：考查了学生分析问题与解决问题的能力。

3、【核心素养】：考查学生逻辑推理、数学运算、数学建模的核心素养

4、 重点突出体现“四翼”中的综合性原则

拓展题

10. (1) 已知$a>0,b>0$，且$a\neq b$,证明:$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$;

（2）若$f(x)=e^x-mx$，且x_1，x_2是函数$f(x)$的两个不同的零点，应用 (1) 的结论证明：$x_1+x_2>2$.

（2021•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=x(1-lnx)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）设 a， b 为两个不相等的正数，且 $blna-alnb=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$.

1、【知识】：均值不等式的拓展应用
2、【能力】：考查了学生分析问题与解决问题的能力。
3、【素养】：考查学生数学抽象、逻辑推理、数学运算、创新思维的核心素养。
4、 重点突出体现“四翼”中的创新性原则

时间分配

题号 2	题目类型	题目来源	备注	预计完成时间
1	基础巩固	原创	易	6分钟
2		原创	易	
3		原创	中	
4		2022新高考全国I改	中	
5		2022新高考全国II改	中	
6	综合提高	原创	中	10分钟
7		引用	中	
8		学科资源库	中	
9		学科资源库	难	
10	拓展应用	原创组合	难	14分钟

作业能够体现

1. 基础性

2. 有效性

3. 分层性

4. 创新性

质量检测与命题反思

检测范围	2020级特优班	2020级实验班	2020级普通班
预计检测时间	20分（全部题目）	25分钟（全部题目）	30分钟（必做完成）
实际检测时间	25分钟（全部题目）	30分钟（约10人未按要求完成选做题）	30分钟（约8人未完成必做题）

基础题

5．（多选）已知 $a,b\in R$，$a>0,b>0$，且 $a^2-2ab-3b^2=1$，则（　）

A．$a+b$ 有最小值 1　　B．$a-b$ 有最小值 1

C．$3a+5b$ 有最小值 $2\sqrt{2}$　　D．$3a-5b$ 有最小值 $2\sqrt{2}$

母题　（人教B版必修5第102页自测与评估练习）：

如果 $x>0$，$y>0$，$x+y+xy=2$，则 $x+y$ 的最小值为（　）.

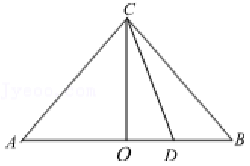
A. $\frac{3}{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}-2$　　D. $2-\sqrt{3}$

教材改编题，重视课本，重视课后习题

提高题

8．数学里有一种证明方法叫做 *Proofs without words*，也称之为无字证明，一般是指仅用图象语言而无需文字解释就能不证自明的数学命题，由于这种证明方法的特殊性，无字证明被认为比严格的数学证明更为优雅．现有如图所示图形，在等腰直角三角形ΔABC中，点O为斜边AB的中点，点D为斜边AB上异于顶点的一个动点，设$AD=a$，$BD=b$，则该图形可以完成的无字证明为(　　)



A．$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　B．$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

C．$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$　　D．$a^2+b^2\geqslant2\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

8．古希腊科学家阿基米德在《论平面图形的平衡》一书中提出了杠杆原理，它是使用天平称物品的理论基础，当天平平衡时，左臂长与左盘物品质量的乘积等于右臂长与右盘物品质量的乘积，某金店用一杆不准确的天平（两边臂不等长）称黄金，某顾客要购买$10g$黄金，售货员先将$5g$的砝码放在左盘，将黄金放于右盘使之平衡后给顾客；然后又将$5g$的砝码放入右盘，将另一黄金放于左盘使之平衡后又给顾客，则顾客实际所得黄金(　　)

A．大于$10g$　　B．小于$10g$　　C．大于等于$10g$　　D．小于等于$10g$

拓展题

10.

(2) $f(x)$ 有两个零点 则 $x_1=\frac{e^{x_1}}{m}$ $x_2=\frac{e^{x_2}}{m}$

有 $e^{x_1}=m\cdot x_1$，$e^{x_2}=m\cdot x_2$ 则 $m=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$

要证 $x_1+x_2>2$ 即证 $\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{m}>2$ 即 $\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_1}-e^{x_2}}(x_1-x_2)>2$

不妨设 $x_1>x_2$. 记 $t=x_1-x_2$ 则 $t>0$. $e^t>1$

只要证 $t\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}>2$ 即 $(t-2)e^t+t+2>0$.

记 $h(t)=(t-2)e^t+t+2$ $(t>0)$

$h'(t)=(t-1)e^t+1$ $h''(t)=te^t>0$

故 $h'(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调增 $h'(0)=0$ $\therefore h'(t)>h'(0)$

则 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，则 $h(t)>h(0)=0$

即 $(t-2)e^t+t+2>0$ 成立

$\therefore x_1+x_2>2$.

，

证明：因为 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的两个不同零点，所以 $f(x_1)=e^{x_1}-mx_1=0$，$f(x_2)=e^{x_2}-mx_2=0$，即 $\begin{cases}e^{x_1}=mx_1,\\ e^{x_2}=mx_2,\end{cases}$ 两边同时取对数得 $\begin{cases}x_1=\ln m+\ln x_1,\\ x_2=\ln m+\ln x_2,\end{cases}$ 于是 $x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$，即 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，由对数均值不等式 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，故 $x_1+x_2>2$.

对数均值不等式在解决函数零点、方程的根、不等式证明和极值点偏移等高考压轴题中应用广泛，常可**化繁为简，事半功倍**。

对数均值不等式为背景的高考试题**屡见不鲜**

（2022 新高考Ⅱ）已知函数 $f(x)=xe^{ax}-e^{x}$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求 a 的取值范围；

$\frac{1}{\ \ }+\frac{1}{\ \ }+\cdots+\frac{1}{\ \ }>\ln(n+1)$

（2021 新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$

学生思维没有内化，单纯记住结论，

考试时想不到使用，也不会使用

(1)若 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围；

(2)证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，则 $x_1x_2<1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$

教育教学感悟

问渠那得清如许，为有源头活水来

HPM视角下不等式的学习让学生思维有源，

课程视域下的作业设计让学生思维不断发展

思维有源，活力无限

人

感谢各位领导及同事的倾听

市一中的工作体验，让我对教师这个职业有了更深的感悟，我坚信：一支粉笔，三尺讲台，一颗爱生如子的心，足以让我的人生写满精彩。让我们携手并肩，凝心聚力，为实现教育梦、中国梦，为创造一中更加辉煌的明天而努力奋斗、拼搏进取。