高考蓝皮书

BLUE BOOK OF NCEE

高考试题分析

（2023）

ANALYSIS OF NATIONAL COLLEGE ENTRANCE EXAMINATION TEST QUESTIONS（2023）

中国高考报告系列丛书

中国高考报告学术委员会 / 编

数学

现代教育出版社
Modern Education Press

专题五　数列

考向(一)　数列的概念

题组一

(2022全国乙,理4)嫦娥二号卫星在完成探月任务后,继续进行深空探测,成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星.为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值,用到数列$\{b_n\}$:$b_1=1+\frac{1}{\alpha_1}$,$b_2=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}}$,$b_3=1+\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}}$,…,依此类推,其中$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$.则(　　)

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

【试题立意】本题以人造卫星的应用为载体,考查数列中项的大小问题,属于探索创新情境,参照人教A版必修第一册第42页练习第2题(3)(4),人教B版必修第一册第67页练习B第2题(5)(6)命制,在课程标准中内容要求是"梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质",学业要求是"能够从函数的观点认识方程和不等式,感悟数学知识之间的关联,认识函数的重要性.掌握等式与不等式的性质".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

关键信息	数学符号与抽象
$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$	方法一:利用不等式的性质比较大小 方法二:特值

(2)逻辑思维能力和运算求解能力

运用不等式的性质或取特值法比较大小,考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括的能力;会用演绎、归纳和类比进行推理.

【解题过程】(方法一)因为$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$,所以$\alpha_1<\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}$,$\frac{1}{\alpha_1}>\frac{1}{\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}}$,得到$b_1>b_2$,

同理$\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}>\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}$,可得$b_2<b_3$,$b_1>b_3$,

又因为$\frac{1}{\alpha_2}>\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3+\frac{1}{\alpha_4}}}$,$\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}<\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3+\frac{1}{\alpha_4}}}$,故$b_2<b_4$,$b_3>b_4$.

以此类推，可得 $b_1>b_3>b_5>b_7>\cdots$，$b_7>b_8$，$b_2<b_4<b_6<b_8<\cdots$，故 ABC 错误，D 正确. 故选 D.

（方法二）依题意，不妨令 $\alpha_k=1(k=1,2,\cdots)$，则 $b_1=2$，$b_2=\frac{3}{2}$，$b_3=\frac{5}{3}$，$b_4=\frac{8}{5}$，$b_5=\frac{13}{8}$，$b_6=\frac{21}{13}$，$b_7=\frac{34}{21}$，$b_8=\frac{55}{34}$，所以 $b_1>b_5$，$b_3>b_8$，$b_6>b_2$，$b_4<b_7$. 故选 D.

【答案】 D

【失分剖析】 因数列 $\{b_n\}$ 的表达式太复杂导致计算错误.

题组二

（2021 新高考Ⅰ,16）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 20 dm×12 dm 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 10 dm×12 dm，20 dm×6 dm 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240\ \mathrm{dm}^2$，对折 2 次共可以得到 5 dm×12 dm，10 dm×6 dm，20 dm×3 dm 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180\ \mathrm{dm}^2$，以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为________；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$________ dm^2.

【试题立意】 本题以民间剪纸时不同折叠次数而得到不同规格的图形为背景，考查数列的通项及求和问题，属于生活实践情境. 参照人教 A 版选择性必修第二册第 56 页第 10 题，人教 B 版选择性必修第三册第 57 页第 10 题命制，在课程标准中内容要求是“探索并掌握等差数列和等比数列的变化规律，建立通项公式和前 n 项和公式”，学业要求是“掌握通项公式与前 n 项和公式的关系；能够运用数列解决简单的实际问题”.

【关键能力】

（1）数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数	由对折 1 次、对折 2 次归纳出对折 3 次、对折 4 次的图形的种数，并寻找到其中的规律
2	$\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$	利用特殊到一般的数学思想，归纳出数列的通项公式，根据归纳出的通项公式选择求和方法

（2）逻辑思维能力

通过前 4 次对折以后面积的计算，用归纳进行推理，得到对折 n 次的通项公式，再利用错位相减法求和，考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括以及用演绎、归纳和类比进行推理的能力.

（3）运算求解能力

本题是一个等差数列和一个等比数列乘积的求和，用错位相减法去计算，主要考查根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理的能力.

【解题过程】 对折 3 次共可以得到 $\frac{5}{2}$ dm×12 dm，5 dm×6 dm，10 dm×3 dm，20 dm×$\frac{3}{2}$dm 四种规格的图形，面积之和 $S_3=4\times30=120\ \mathrm{dm}^2$；

对折 4 次共可以得到$\frac{5}{4}$ dm×12 dm，$\frac{5}{2}$dm×6 dm，5 dm×3 dm，10 dm×$\frac{3}{2}$dm，20 dm×$\frac{3}{4}$dm 五种规格的图形，$S_4=5\times15=75\ \mathrm{dm}^2$.

可以归纳对折 n 次可得 $n+1$ 种规格的图形，$S_n=(n+1)\cdot\frac{240}{2^n}\mathrm{dm}^2$.

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=S_1+S_2+\cdots+S_n=240\left(\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}\right)$.

记 $T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$.　①

则 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$.　②

①与②式相减，得 $T_n-\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$.

故 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$.

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=240\cdot T_n=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$.

【答案】5　$240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$

【失分剖析】一是归纳不出数列通项公式导致失分；二是进行错位相减求和时，相减后等比数列的项数弄错或化简出错而导致失分.

【变式题型】

(2020 全国Ⅲ，理 17)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1)计算 a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明；

(2)求数列$\{2^na_n\}$的前 n 项和 S_n.

[变式]第一问利用归纳猜想的推理方法得到通项公式为 $a_n=2n+1$；第二问运用错位相减法求得前 n 项和 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

[解题过程]解 (1)$a_2=5$，$a_3=7$.

猜想 $a_n=2n+1$.

由已知可得 $a_{n+1}-(2n+3)=3[a_n-(2n+1)]$，$a_n-(2n+1)=3[a_{n-1}-(2n-1)]$，……，$a_2-5=3(a_1-3)$.

因为 $a_1=3$，所以 $a_n=2n+1$.

(2)由(1)得 $2^na_n=(2n+1)2^n$，所以 $S_n=3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\times2^n$. ①

从而 $2S_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n+1)\times2^{n+1}$. ②

①－②得 $-S_n=3\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n+1)\times2^{n+1}$.

所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

题组三

(2020 全国Ⅱ，理 12)0-1 周期序列在通信技术中有着重要应用. 若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数 m，使得 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 成立，则称其为 0-1 周期序列，并称满足 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期. 对于周期为 m 的 0-1 序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标. 下列周期为 5 的 0-1 序列中，满足 $C(k)\leqslant\frac{1}{5}(k=1,2,3,4)$ 的序列是(　　)

A. 11010⋯　　B. 11011⋯　　C. 10001⋯　　D. 11001⋯

【试题立意】本题以周期序列在通信技术中的应用为载体，考查数列的周期性及对 5 个两项乘积之和的求法，属于探索创新情境. 参照人教 A 版选择性必修第二册第 8 页习题 4.1 第 2 题(4)，人教 B 版选择性必修第三册第 13 页练习 A 第 4 题命制，在课程标准中内容要求是“通过对日常生活中实际问题的分析，了解数列的概念”，学业要求是“能够结合具体实例，理解通项公式对于数列的重要性”.

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$C(k)=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}$，周期为 5	结合题干新定义的理解，当 $m=5$ 时，$C(1)=\frac{1}{5}(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+$ $+a_5a_6$ $a_4a_5)$，同理可得所有的 $C(k)$
2	A. 11010⋯　B. 11011⋯　C. 10001⋯　D. 11001⋯	分别对 4 个选项中 $k=1,2,3,4$ 进行讨论，若有一个不满足条件，就排除

(2)逻辑思维能力

利用 0-1 周期序列满足的周期是 5，即 $m=5$ 代入求解，再结合选项代入检验巧妙解决选择题，考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括以及用演绎、归纳和类比进行推理的能力.

(3)创新能力

要求学生能发现问题、提出问题，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想方法，选择有效的方法和手段分析信息，进行独立的思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题，包括解决相关学科、生产、生活中的简单数学问题.

【解题过程】∵周期为 5，∴$m=5$. ∴$C(k)=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+k}(k=1,2,3,4)$.

∵$C(k)\leqslant\frac{1}{5}(k=1,2,3,4)$，∴$\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+k}\leqslant 1(k=1,2,3,4)$.

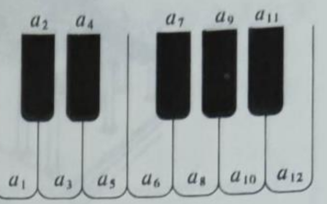
将选项代入验证可知，只有选项 C 符合题意. 故选 C.

【答案】C

【失分剖析】本题综合性较强，试题难度较高，因无法准确理解 $C(k)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i a_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$ 而导致出错.

题组四

(2020 全国Ⅱ，文 3)如图，将钢琴上的 12 个键依次记为 a_1，a_2，…，a_{12}. 设 $1\leqslant i<j<k\leqslant 12$. 若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$，则称 a_i，a_j，a_k 为原位大三和弦；若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$，则称 a_i，a_j，a_k 为原位小三和弦. 用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为(　　)



A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 15

【试题立意】本题以钢琴上的 12 个键为载体，考查数列的应用，属于探索创新情境. 在课程标准中内容要求是"通过日常生活和数学中的实例，了解数列的概念和表示方法"，学业要求是"能够运用数列解决简单的实际问题".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$k-j=3$ 且 $j-i=4$	i 依次取符合题意的 1,2,3,4,5 列举出 5 个原位大三和弦
2	$k-j=4$ 且 $j-i=3$	i 依次取符合题意的 1,2,3,4,5 列举出 5 个原位小三和弦

(2)创新能力

本题将数列知识巧妙融合到钢琴上的 12 个键，题型新颖、设计巧妙. 解题时要注意按照一定顺序避免重复或者遗漏，考查学生发现问题、提出问题，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想方法，选择有效的方法和手段分析信息，进行独立的思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题，包括解决相关学科、生产、生活中的简单数学问题的能力.

【解题过程】结合题意，原位大三和弦有 (a_1,a_5,a_8)，(a_2,a_6,a_9)，(a_3,a_7,a_{10})，(a_4,a_8,a_{11})，(a_5,a_9,a_{12})，共 5 个，原位小三和弦有 (a_1,a_4,a_8)，(a_2,a_5,a_9)，(a_3,a_6,a_{10})，(a_4,a_7,a_{11})，(a_5,a_8,a_{12})，共 5 个，故原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 $5+5=10$. 故选 C.

【答案】C

考向(二)　等差数列、等比数列及其求和

题组一

(2022 新高考Ⅱ，3)中国的古建筑不仅是挡风遮雨的住处，更是美学和哲学的体现. 如图 1 是某古建筑物中的举架结构，AA'，BB'，CC'，DD' 是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举. 图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图. 其中 DD_1，CC_1，BB_1，AA_1 是脊，OD_1，DC_1，CB_1，

BA_1 是相等的步，相邻桁的举步的比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1}=0.5,\frac{CC_1}{DC_1}=k_1,\frac{BB_1}{CB_1}=k_2,\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$，若 k_1，
k_2、k_3 是公差为 0.1 的等差数列，直线 OA 的斜率为 0.725，则 $k_3=$（　　）

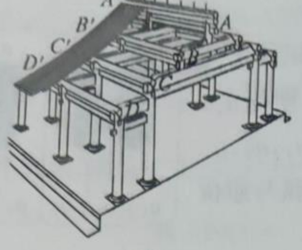


图 1

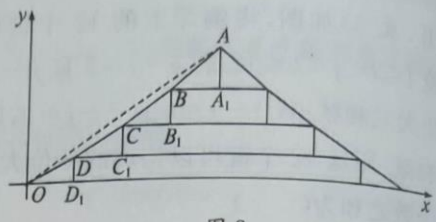


图 2

A. 0.75　　B. 0.8　　C. 0.85　　D. 0.9

【试题立意】本题以中国古代建筑为载体，考查等差数列的通项公式和求和公式，属于生活实践情境. 参照人教B版选择性必修第三册第56页A组第7题命制，在课程标准中内容要求是“通过生活中的实例，理解等差数列的概念和通项公式的意义”，学业要求是“能够运用数列解决简单的实际问题”.

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	若 k_1,k_2,k_3 是公差为 0.1 的等差数列	考虑 k_1,k_2,k_3 的关系，可利用等差数列定义得 $k_1=k_3-0.2,k_2=k_3-0.1$
2	直线 OA 的斜率为 0.725	用斜率公式表示直线 OA 的斜率建立线段之间的联系

(2)运算求解能力

考查学生根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理的能力.

【解题过程】不妨设 $OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1$，则 $DD_1=0.5,CC_1=k_1,BB_1=k_2,AA_1=k_3$.

由题意得 $\frac{DD_1+CC_1+BB_1+AA_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}=0.725$，即 $\frac{0.5+k_1+k_2+k_3}{4}=0.725$.

$\because k_1=k_3-0.2,k_2=k_3-0.1,\therefore \frac{0.5+k_3-0.2+k_3-0.1+k_3}{4}=0.725$. 解得 $k_3=0.9$. 故选D.

【答案】D

【失分剖析】一是不会提取有效信息，不理解“举”和“步”的含义，二是不能建立多个线段之间的联系，缺乏信息加工和逻辑思维能力.

题组二

(2022全国甲，文18，理17)设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

(2)若a_4,a_7,a_9成等比数列,求S_n的最小值.

【试题立意】本题以数列前n项和与项之间的关系为载体,考查等差数列的证明、等比数列的性质、数列前n项和的求法,属于课程学习情境.参照人教A版选择性必修第二册第41页习题4.3第11题,人教B版选择性必修第三册第44页习题5-3C第2题命制,在课程标准中内容要求是"探索并掌握等差数列的前n项和公式,理解等差数列的通项公式与前n项和公式的关系",学业要求是"掌握通项公式与前n项和公式的关系".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$	先化简得$2S_n+n^2=2na_n+n$,再根据$a_n=\begin{cases}a_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2\end{cases}$化简
2	证明:$\{a_n\}$是等差数列	考虑等差数列的定义,化简出$a_n-a_{n-1}=d$即可
3	若a_4,a_7,a_9成等比数列	根据a_4,a_7,a_9的关系能求出首项a_1

(2)逻辑思维和运算求解能力

理解并利用数列前n项和与项之间的关系进行运算,考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括,准确、清晰、有条理地进行表述的能力以及能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径的能力.

【解题过程】(1)证明(方法一)由$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$,变形为$2S_n=2na_n+n-n^2$,记为①式,又当$n\geqslant 2$时,有$2S_{n-1}=2(n-1)a_{n-1}+n-1-(n-1)^2$,记为②式,①-②并整理可得$(2n-2)a_n-(2n-2)a_{n-1}=2n-2,n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$.

即$a_n-a_{n-1}=1,n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$,所以$\{a_n\}$是公差为1的等差数列.

(方法二)因为$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$,所以$2S_n+n^2=2na_n+n$,所以$2S_{n+1}+(n+1)^2=2(n+1)a_{n+1}+n+1$,即$2S_{n+1}+(n+1)^2=2(n+1)(S_{n+1}-S_n)+n+1$,化简得$2nS_{n+1}-2(n+1)S_n=n(n+1)$,所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$,故数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$a_1$,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列,

所以$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}$,所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}$,$S_{n-1}=(n-1)a_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(n\geqslant 2)$,

所以$a_n=a_1+n-1(n\geqslant 2)$,所以$a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 3)$.

又$2S_2+4=4a_2+2$,所以$a_1+a_2+2=2a_2+1$,即$a_2-a_1=1$,所以$a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$,故$\{a_n\}$为公差为1的等差数列.

(2)解(方法一)由题意可知$a_7^2=a_4a_9$,即$(a_1+6)^2=(a_1+3)(a_1+8)$,解得$a_1=-12$,

所以$a_n=-12+(n-1)\times 1=n-13$,故数列$\{a_n\}$为递增数列,且$a_1<a_2<\cdots<a_{12}<0$,$a_{13}=0$,则$S_n$的最小值为$S_{12}=S_{13}=-78$.

(方法二)因为a_4,a_7,a_9成等比数列,所以$a_7^2=a_4\cdot a_9$,

即$(a_1+6)^2=(a_1+3)(a_1+8)$，解得$a_1=-12$，

所以$S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$，

所以当$n=12$或$n=13$时，S_n取最小值-78.

【失分剖析】对数列中前n项和与通项之间关系式的处理不够熟练，尤其是计算$S_{n+1}-S_n$或S_n-S_{n-1}时容易出错.

【同类题型】

1.(2021全国乙，理19)记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积.已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1)证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

[解题过程](1)**证明**　当$n=1$时，$b_1=S_1$，易得$b_1=\frac{3}{2}$.

当$n\geqslant 2$时，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=S_n$，代入$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$消去$S_n$，得$\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2$，化简得$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$.

故$\{b_n\}$是以$\frac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列.

(2)**解**　易得$a_1=S_1=b_1=\frac{3}{2}$.

由(1)可得$b_n=\frac{n+2}{2}$，由$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$可得$S_n=\frac{n+2}{n+1}$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$，显然$a_1$不满足该式.

故$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2}, n=1,\\ -\frac{1}{n(n+1)}, n\geqslant 2.\end{cases}$

2.(2021全国甲，文18)记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_n>0$，$a_2=3a_1$，且数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.证明：$\{a_n\}$是等差数列.

[解题过程]证明　∵数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列，$a_2=3a_1$，

∴$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$，即数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为$\sqrt{a_1}$.

∴$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$，即$S_n=n^2a_1$.

当$n\geqslant 2$时，$S_n=n^2a_1$，$S_{n-1}=(n-1)^2a_1$，则$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$.

当$n=1$时，由$a_n=(2n-1)a_1$得$a_1=(2\times 1-1)a_1=a_1$，

∴$a_n=(2n-1)a_1$，$n\in\mathbf{N}^*$，∴$\{a_n\}$是等差数列.

题组三

(2022全国乙,文10,理8)已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168,$a_2-a_5=42$,则$a_6=$(　　)

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

【试题立意】本题以等比数列为载体,考查数列的通项公式和求和公式,属于课程学习情境.参照人教A版选择性必修第二册第37页练习第1题、第3题,人教B版选择性必修第三册第43页习题5-3 B第1题命制,在课程标准中内容要求是"探索并掌握等比数列的前n项和公式,理解等比数列的通项公式与前n项和公式的关系",学业要求是"掌握通项公式与前n项和公式的关系".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168	设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$q\neq0$,易得$q\neq1$,思路一:$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168$;思路二:$a_1(1+q+q^2)=168$
2	$a_2-a_5=42$	$a_1q-a_1q^4=42$

(2)运算求解能力

根据等比数列的通项公式和前n项和进行正确运算、变形和数据处理;要求学生能够了解运算法则及其适用范围,正确进行运算.

【解题过程】(方法一)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$q\neq0$,由题意,$q\neq1$.

则$a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168$,$a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=a_1q(1-q^3)=42$,

联立解得$q=\frac{1}{2}$,$a_1=96$,则$a_6=a_1q^5=96\times\frac{1}{32}=3$.故选D.

(方法二)设公比为$q(q\neq0)$,则$a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=168$,$a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=a_1q(1-q)(1+q+q^2)=42$,$\therefore q(1-q)=\frac{1}{4}$,解得$q=\frac{1}{2}$,$\therefore a_1=96$,$\therefore a_6=a_1q^5=96\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=3$.故选D.

【答案】D

【变式题型】

(2022全国乙,文13)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.若$2S_3=3S_2+6$,则公差$d=$________.

[变式]本题由题组三中的前3项和变为前2项和与前3项和的关系,考查数列的通项公式.由$2S_3=3S_2+6$可得$2(3a_1+3d)=3(2a_1+d)+6$,解得$d=2$.

[答案]2

【同类题型】

1.(2021全国甲,文9)记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和.若$S_2=4$,$S_4=6$,则$S_6=$(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

[答案]A

2.（2020 全国Ⅰ，文 10）设$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则$a_6+a_7+a_8=$（　　）

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

[答案]D

3.（2020 全国Ⅱ，文 6）记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和. 若$a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则$\frac{S_n}{a_n}=$（　　）

A. 2^n-1　　B. $2-2^{1-n}$　　C. $2-2^{n-1}$　　D. $2^{1-n}-1$

[答案]B

4.（2020 全国Ⅱ，文 14）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和. 若$a_1=-2$，$a_2+a_6=2$，则$S_{10}=$________.

[答案]25

5.（2021 新高考Ⅱ，17）记S_n是公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3=S_5$，$a_2a_4=S_4$.

(1)求数列a_n的通项公式a_n；

(2)求使$S_n>a_n$成立的n的最小值.

[解题过程]解　(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

$\because S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3$，又$S_5=a_3$，$\therefore 5a_3=a_3$，$\therefore a_3=0$，

$\therefore S_4=\frac{4(a_1+a_4)}{2}=2(a_2+a_3)=2a_2$，$\therefore a_2\cdot a_4=S_4=2a_2$，$\therefore a_4=2$，

$\therefore d=a_4-a_3=2$，故$a_n=a_4+(n-4)d=2+2(n-4)=2n-6$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)知$a_n=2n-6$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore a_1=-4$，

$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(-4+2n-6)}{2}=n^2-5n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

要使$S_n>a_n$，则$n^2-5n>2n-6$，即$n^2-7n+6>0$，$(n-1)(n-6)>0$解得$n<1$或$n>6$.

$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n$的最小值为 7.

题组四

（2022 新高考Ⅰ，17）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

【试题立意】本题以数列前n项和与等差数列为载体，考查求通项公式与裂项相消法求和，属于课程学习情境. 参照人教 A 版选择性必修第二册第 41 页习题 4.3 第 11 题，人教 B 版选择性必修第三册第 44 页习题 5-3 C 第 2 题命制，在课程标准中内容要求是“探索并掌握等差数列的前n项和公式，理解等差数列的通项公式与前n项和公式的关系”，学业要求是“掌握通项公式与前n项和公式的关系”.

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列	根据等差数列的通项公式得$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$
2	求$\{a_n\}$的通项公式	注意$n=1$和$n\geqslant2$两种情况
3	证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$	由(1)的结论，利用裂项相消法求和即可得证

(2)逻辑思维和运算求解能力

该题利用等差数列的通项公式，前n项和与通项的关系，结合累乘法和裂项求和法进行运算；考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括，能准确、清晰、有条理地进行表述的能力以及会根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理，能根据问题的条件，寻找与设计合理、简捷的运算途径的能力.

【解题过程】(1)解 (方法一)$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是以$\frac{S_1}{a_1}=1$为首项，以$\frac{1}{3}$为公差的等差数列，

$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\times\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$.

$\therefore S_n=\frac{n+2}{3}a_n$. ①

当$n\geqslant2$时，$S_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$. ②

①−②得$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，$\therefore\frac{n+1}{3}a_{n-1}=\frac{n-1}{3}a_n$，$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$.

$\therefore a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n-1}{n-3}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}\cdot a_1(n\geqslant2)$，

又$a_1=1$，$\therefore a_n=\frac{(n+1)\times n}{2\times1}\times1=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$.

又当$n=1$时，$a_1=1$也符合上式，$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(方法二)$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是以$\frac{S_1}{a_1}=1$为首项，以$\frac{1}{3}$为公差的等差数列，$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\times\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$.

$\therefore S_n=\frac{n+2}{3}a_n$. ①

当$n\geqslant2$时，$S_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$. ②

①−②得$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，$\therefore\frac{n+1}{3}a_{n-1}=\frac{n-1}{3}a_n$，

$\therefore\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$，$\therefore\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)\cdot n}$.

设$\frac{a_n}{n(n+1)}=b_n$，则$b_n=b_{n-1}$，$\therefore\{b_n\}$为常数列，且$b_1=\frac{a_1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{a_n}{n(n+1)}=b_n=\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

（方法三）$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是首项为$\frac{S_1}{a_1}=1$，公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，

$\therefore\frac{S_n}{S_n-S_{n-1}}=\frac{n+2}{3}(n\geqslant 2)$，$\therefore\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+2}{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore S_n=S_1\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{S_3}{S_2}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{2+2}{2-1}\cdot\frac{3+2}{3-1}\cdot\frac{4+2}{4-1}\cdot\frac{5+2}{5-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n-4}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n+2}{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$，

又$a_1=1$满足此公式，$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

（方法四）$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是首项为$\frac{S_1}{a_1}=1$，公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，

$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\times\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$，$\therefore\frac{S_2}{a_2}=\frac{a_1+a_2}{a_2}=\frac{1+a_2}{a_2}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$，则$a_2=3$，

$\therefore\frac{S_3}{a_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_3}=\frac{4+a_2}{a_2}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$，则$a_3=6$，同理可以得到$a_4=10$，$a_5=15$.

归纳上述结果，猜想$a_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\because\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+2}{3}$，$\therefore a_n=\frac{3}{n+2}S_n=\frac{3}{n+2}(a_n+S_{n-1})(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_n=\frac{3}{n-1}S_{n-1}=\frac{3}{n-1}\cdot\frac{(n-1)+2}{3}\cdot a_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant 2)$.

下面用数学归纳法证明$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$对所有正整数都成立，

当$n=1$时，$a_1=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$，猜想成立；

假设当$n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，猜想成立，即$a_k=\frac{k(k+1)}{2}$，那么$a_{k+1}=\frac{(k+1)+1}{(k+1)-1}a_k=\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$，

即当$n=k+1$时猜想也成立.

综上，$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$对所有正整数都成立，$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)证明 由(1)知，$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2.$

题组五

(2022新高考Ⅱ,17)已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为公比为2的等比数列，且$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1)证明：$a_1=b_1$；

(2)求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数.

【试题立意】本题以等差数列和等比数列为载体，考查数列的通项公式，属于课程学习情境，在课程标准中内容要求是"理解等差数列的概念和通项公式的意义.理解等比数列的概念和通项公式的意义"，学业要求是"能够结合具体实例，理解通项公式对于数列的重要性".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$	借助两个数列的首项和公差、公比进行表达，借助方程思想解决问题
2	求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数	观察集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$是数集，元素为$k$，符合$b_k=a_m+a_1$，从而探究$m$和$k$的关系

(2)逻辑思维能力

该题关键是借助于逻辑思维能力准确寻求m和k的关系式，考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括，能准确、清晰、有条理地进行表述的能力.

【解题过程】(1)证明 设等差数列的公差为d，由$a_2-b_2=a_3-b_3$，

得$a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1$，得$d=2b_1$.

由$a_2-b_2=b_4-a_4$，可得$a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)$，

可得$a_1+2b_1-2b_1=8b_1-(a_1+6b_1)$，整理可得$a_1=b_1$，得证.

(2)解 由(1)知$d=2b_1=2a_1$，由$b_k=a_m+a_1$，可得$b_1\cdot 2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$，

即$b_1\cdot 2^{k-1}=b_1+(m-1)\cdot 2b_1+b_1$，得$2^{k-1}=2m$.

$\because 1\leqslant m\leqslant 500$，

$\therefore 2\leqslant 2^{k-1}\leqslant 1\,000$.

$\therefore 2\leqslant k\leqslant 10$.

又$k\in\mathbf{N}^*$，故集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数为9.

【失分剖析】一是不理解集合含义，二是不能准确得出m和k的关系式导致失分.

【同类题型】

(2020新高考Ⅰ,18)已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，$a_3=8$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 b_m 为$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数,求数列$\{b_m\}$的前100项和S_{100}.

[解题过程]解 (1)设$\{a_n\}$的公比为q.由题设得$a_1q+a_1q^3=20$,$a_1q^2=8$.

解得$q=\frac{1}{2}$(舍去),$q=2$.因为$a_1q^2=8$,所以$a_1=2$.所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

(2)由题设及(1)知$b_1=0$,且当$2^n\leqslant m<2^{n+1}$时,$b_m=n$.

所以$S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)=480$.

题组六

(2021全国乙,文19)设$\{a_n\}$是首项为1的等比数列,数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{na_n}{3}$.已知$a_1,3a_2,9a_3$成等差数列.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记S_n和T_n分别为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和.证明:$T_n<\frac{S_n}{2}$.

【试题立意】本题以一个等比数列的通项公式与另一个数列通项公式间的关系为载体,考查数列的通项公式及前n项和,属于课程学习情境,参照人教A版选择性必修第二册第56页复习参考题4第11题命制,在课程标准中内容要求是"探索并掌握等差数列和等比数列的前n项和公式,理解通项公式和前n项和公式的关系",学业要求是"掌握通项公式与前n项和公式的关系".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$\{a_n\}$是首项为1的等比数列; $a_1,3a_2,9a_3$成等差数列	建立首项和公比的方程
2	证明:$T_n<\frac{S_n}{2}$	利用公式法、错位相减法分别求出S_n,T_n,再利用作差法比较即可

(2)逻辑思维和运算求解能力

利用等差数列的性质、错位相减法求数列的和及作差法比较大小,考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括的能力以及会根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理的能力.

【解题过程】(1)解 设$\{a_n\}$的公比为q,则$a_n=q^{n-1}$.

因为$a_1,3a_2,9a_3$成等差数列,所以$1+9q^2=2\times3q$,解得$q=\frac{1}{3}$,故$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

由$b_n=\frac{na_n}{3}$,得$b_n=\frac{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)证明 由(1)可知 $S_n=\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$.

又 $b_n=\dfrac{n}{3^n}$,则 $T_n=\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}$,①

两边同乘$\dfrac{1}{3}$,得$\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}$,②

①-②,得$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}$,即$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=$
$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{3^{n+1}}$,整理得 $T_n=\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{n}{2\times3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^n}$,

则 $2T_n-S_n=2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^n}\right)-\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)=-\dfrac{n}{3^n}<0$. 故 $T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

【同类题型】

1.(2020全国Ⅰ,理17)设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列,a_1为a_2,a_3的等差中项.

(1)求$\{a_n\}$的公比;

(2)若$a_1=1$,求数列$\{na_n\}$的前n项和.

[**解题过程**]解 (1)设$\{a_n\}$的公比为q,由题设得$2a_1=a_2+a_3$,即$2a_1=a_1q+a_1q^2$.

所以$q^2+q-2=0$,解得$q=1$(舍去),$q=-2$.

故$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记S_n为$\{na_n\}$的前n项和.

由(1)及题设可得,$a_n=(-2)^{n-1}$.

所以$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$,

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$.

可得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$.

所以$S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

2.(2020全国Ⅲ,文17)设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=4,a_3-a_1=8$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记S_n为数列$\{\log_3a_n\}$的前n项和.若$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$,求m.

[**解题过程**]解 (1)设$\{a_n\}$的公比为q,则$a_n=a_1q^{n-1}$.

由已知得$\begin{cases}a_1+a_1q=4,\\a_1q^2-a_1=8,\end{cases}$解得$a_1=1,q=3$.所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n-1}$.

(2)由(1)知 $\log_3 a_n=n-1$,故 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

由 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$ 得 $m(m-1)+(m+1)m=(m+3)(m+2)$,即 $m^2-5m-6=0$,解得 $m=-1$(舍去),$m=6$.

题组七

(2021 新高考Ⅰ,17)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)记 $b_n=a_{2n}$,写出 b_1,b_2,并求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求$\{a_n\}$的前 20 项和.

【试题立意】本题以数列递推公式为载体考查数列通项公式与数列求和,属于课程学习情境,在课程标准中内容要求是"探索并掌握等差数列和等比数列的变化规律,建立通项公式和前 n 项和公式的关系",学业要求是"能够结合具体实例,理解通项公式对于数列的重要性,知道通项公式是这类函数的解析表达式".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$	思路一是根据递推关系求出数列$\{b_n\}$的前几项,观察猜想$\{b_n\}$的通项公式,再进一步证明完善; 思路二是由递推关系得 $a_{n+2}-a_n=3$,即数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项分别为等差数列
2	$b_n=a_{2n}$	结合题干中的递推关系可考虑 a_{2n} 与 $a_{2n-2}(n\geqslant2)$之间的关系,从而寻找思路
3	求$\{a_n\}$的前 20 项和	思路一是逐项求和;思路二是先求$\{a_n\}$的通项公式,再求和

(2)逻辑思维和运算求解能力

对题干中的递推关系式合理地利用累加、推理归纳等得出结论,要求学生会对条件进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括,会用演绎、归纳和类比进行推理以及会根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理的能力.

【解题过程】解 (1)$b_1=a_2=a_1+1=2$,$b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$.

由 $b_{n+1}=a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=a_{2n}+2+1=a_{2n}+3$,得 $b_{n+1}-b_n=a_{2n}+3-a_{2n}=3$.

所以$\{b_n\}$是首项为 2,公差为 3 的等差数列,所以 $b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

(2)(方法一)由(1)可得 $a_{2n}=3n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $a_{2n-1}=a_{2n-2}+2=3(n-1)-1+2=3n-2$,$n\geqslant2$,当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 也适合上式,所以 $a_{2n-1}=3n-2$,$n\in\mathbf{N}^*$,

所以数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项分别为等差数列,

则$\{a_n\}$的前 20 项和为 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=10+\frac{10\times9}{2}\times3+10\times2+\frac{10\times9}{2}\times3=300$.

(方法二)数列$\{a_n\}$的前20项中偶数项的和为$a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20}=b_1+b_2+\cdots+b_{10}=10\times2+\frac{10\times9}{2}\times3=155$，又由题中条件有$a_2=a_1+1,a_4=a_3+1,\cdots,a_{20}=a_{19}+1$，故可得$a_n$的前20项的和$S_{20}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{20})-10=2\times155-10=300$.

题组八

(2021全国甲，理18)已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列$\{a_n\}$是等差数列；②数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$.

【试题立意】本题以结构不良问题、条件和结论均开放的数列为载体，考查等差数列的判定及应用，属于探索创新情境，参照人教A版选择性必修第二册第25页习题4.2第7题命制，在课程标准中内容要求是"探索并掌握等差数列的前n项和公式，理解等差数列的通项公式与前n项和公式的关系"，学业要求是"掌握通项公式与前n项和公式的关系".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	①数列$\{a_n\}$是等差数列；②数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列	思路一是作为条件可得$a_n-a_{n-1}=d$和$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=d(n\geqslant2)$； 思路二是作为结论需要证明$a_n-a_{n-1}=d$和$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=d(n\geqslant2)$或$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$和$2\sqrt{S_n}=\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_{n+1}}(n\geqslant2)$
2	$a_2=3a_1$	数列相邻两项之间的关系，因为其简洁，可以考虑作为一个条件使用

(2)逻辑思维能力

本题首先通过化简和推理转化确定条件和结论，然后结合等差数列的通项公式和前n项和公式证明结论，要求学生会对题目条件进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括.

【解题过程】解 若选①②⇒③

设数列$\{a_n\}$的公差为d_1，数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为d_2.

$\because$当$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n>0$，$\therefore d_1>0,d_2>0$.

$$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)d_1}{2}=\frac{d_1}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d_1}{2}\right)n.$$

又$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d_2=\sqrt{a_1}+(n-1)d_2$，

$$\therefore S_n=a_1+d_2^2(n-1)^2+2\sqrt{a_1}d_2(n-1)=d_2^2n^2+(2\sqrt{a_1}d_2-2d_2^2)n+d_2^2-2\sqrt{a_1}d_2+a_1,$$

$$\therefore \frac{d_1}{2}=d_2^2,a_1-\frac{d_1}{2}=2\sqrt{a_1}d_2-2d_2^2,d_2^2-2\sqrt{a_1}d_2+a_1=0,$$

$$\therefore d_2^2=\frac{d_1}{2},d_2=\sqrt{a_1}，即d_1=2a_1,\therefore a_2=a_1+d_1=3a_1.$$

若选①③⇒②

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_2=3a_1$，所以$a_1+d=3a_1$，所以$d=2a_1$，

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=na_1+n(n-1)a_1=n^2a_1$，

所以当$n\geqslant 2$时，$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=n\sqrt{a_1}-(n-1)\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$.

所以$\{\sqrt{S_n}\}$是首项为$\sqrt{a_1}$，公差为$\sqrt{a_1}$的等差数列.

若选②③⇒①

设数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为d，则$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=d$，即$\sqrt{a_1+a_2}-\sqrt{a_1}=d$.

$\because a_2=3a_1$，$\therefore\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$，即$d=\sqrt{a_1}$，

$\therefore\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=\sqrt{a_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$，即$S_n=n^2a_1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$，当$n=1$时，$a_n=(2n-1)a_1$也成立，

$\therefore a_n=(2n-1)a_1,n\in\mathbf{N}^*$.

又$a_{n+1}-a_n=(2n+1)a_1-(2n-1)a_1=2a_1$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

题组九

（2020全国Ⅱ，理6）数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$. 若$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则$k=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【试题立意】本题以等比数列为载体，考查等比数列求和，属于课程学习情境，参照人教A版选择性必修第二册第40页习题4.3第2题(1)，人教B版选择性必修第三册第42页练习A第2题命制，在课程标准中内容要求是“探索并掌握等比数列的前n项和公式，理解等比数列的通项公式与前n项和公式的关系”，学业要求是“掌握通项公式与前n项和公式的关系”.

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$a_1=2,a_{m+n}=a_ma_n$	令$m=1$得$a_{n+1}=2a_n$，从而判定数列$\{a_n\}$是等比数列
2	$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$	利用等比数列前n项和公式求解

(2)运算求解和逻辑思维能力

利用等比数列的定义$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geqslant 2)$及前$n$项和公式$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$进行运算，考查学生根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理的能力以及考查学生会用演绎、归纳和类比进行推理的能力.

【解题过程】$\because a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，令$m=1$，又$a_1=2$，$\therefore a_{n+1}=a_1\cdot a_n=2a_n$，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，$\therefore\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，$\therefore a_n=2^n$.

$\therefore a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{k+1}+2^{k+2}+\cdots+2^{k+10}=2^{k+1}\cdot\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=2^{k+11}-2^{k+1}=2^{15}-2^{5}$.

$\therefore\begin{cases}k+11=15,\\k+1=5,\end{cases}$ 解得 $k=4$.

【答案】 C

【失分剖析】 运用等比数列前 n 项和公式时，忽视项数出错.

题组十

(2020 全国Ⅱ，理 4)北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层．上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块．下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块．已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，则三层共有扇面形石板(不含天心石)　(　　)

A. 3 699 块　　B. 3 474 块

C. 3 402 块　　D. 3 339 块

【试题立意】 本题以北京天坛的圜丘坛为背景考查等差数列的定义及前 n 项和的性质，属于生活实践情境，参照人教 A 版选择性必修第二册第 17 页练习第 1 题、第 55 页第 4 题(2)，人教 B 版选择性必修第三册习题 5-2 B 第 6 题命制，在课程标准中内容要求是“能运用等差数列、等比数列解决简单的实际问题和数学问题，感受数学模型的现实意义与应用”，学业要求是“掌握通项公式与前 n 项和公式的关系；能够运用数列解决简单的实际问题”.

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块．下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块	整个扇面形石板数构成以 9 为首项，9 为公差的等差数列
2	下层比中层多 729 块	思路一：上层扇面形石板总数为 S_n，中层扇面形石板总数为 $S_{2n}-S_n$，下层扇面形石板总数为 $S_{3n}-S_{2n}$，构成等差数列，公差为 729； 思路二：设每层有 n 环，根据等差数列求和公式解答
3	三层共有扇面形石板数	由 $S_{3n}=S_{27}$，即求等比数列的前 27 项的和

(2)逻辑思维能力

构造等差数列，利用等差数列前 n 项和求解，考查学生对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括的能力.

(3)数学建模能力

学生要迅速地对给出的信息进行加工,转化为数列问题解决,考查学生能在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题,分析问题、建立模型,确定参数、计算求解,检验结果、改进模型,能对现实问题进行数学抽象,用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题.

【解题过程】由题意可知,从上到下,从内到外,每环的扇面形石板数构成以9为首项,9为公差的等差数列,设为$\{a_n\}$.

设上层有n环,则上层扇面形石板总数为S_n,中层扇面形石板总数为$S_{2n}-S_n$,下层扇面形石板总数为$S_{3n}-S_{2n}$,三层扇面形石板总数为S_{3n}.

因为$\{a_n\}$为等差数列,所以S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$构成等差数列,公差为$9n^2$.因为下层比中层多729块,所以$9n^2=729$,解得$n=9$.

所以$S_{3n}=S_{27}=27\times9+\frac{27\times26}{2}\times9=3\ 402$.故选C.

【答案】C

【失分剖析】不能有效进行阅读,不具备根据数学建模能力把问题转化成等差数列进行解决.

题组十一

(2020新高考Ⅰ,14)将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$,则$\{a_n\}$的前n项和为__________.

【试题立意】本题以等差数列为载体,考查等差数列的通项公式和前n项和公式,属于课程学习情境,参照人教A版选择性必修第二册第25页习题4.2第8题命制,在课程标准中内容要求是"探索并掌握等差数列的前n项和公式,理解等差数列的通项公式与前n项和公式的关系",学业要求是"掌握通项公式与前n项和公式的关系".

【关键能力】

(1)数学符号与抽象

序号	关键信息	数学符号与抽象
1	$\{2n-1\}$	所有正奇数构成的数列
2	$\{3n-2\}$	所有奇数项均为奇数,所有偶数项均为偶数的数列
3	公共项	思路一是两数列的公共项就是$\{3n-2\}$的所有奇数项,构成新的等差数列; 思路二是通过列举公共项归纳新数列的通项公式

(2)逻辑思维能力

会对条件中的两个数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$进行分析、综合、抽象与概括,从而得到新数列的通项公式.

【解题过程】数列$\{2n-1\}$的项均为奇数,数列$\{3n-2\}$的所有奇数项均为奇数,所有偶数项均为偶数.并且显然$\{3n-2\}$中的所有奇数均能在$\{2n-1\}$中找到,所以$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的所有公共项就是$\{3n-2\}$的所有奇数项,这些项从小到大排列得到的新数列$\{a_n\}$是以1为首项,

以6为公差的等差数列.

所以$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times6=3n^2-2n$.

【答案】$3n^2-2n$

【失分剖析】不能由给出的数列抽象得出新的数列.

命题规律

1. 课标要求

(1)数列概念

通过日常生活和数学中的实例，了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式)，了解数列是一种特殊函数.

(2)等差数列

①通过生活中的实例，理解等差数列的概念和通项公式的意义.

②探索并掌握等差数列的前n项和公式，理解等差数列的通项公式与前n项和公式的关系.

③能在具体的问题情境中，发现数列的等差关系，并解决相应的问题.

④体会等差数列与一元一次函数的关系.

(3)等比数列

①通过生活中的实例，理解等比数列的概念和通项公式的意义.

②探索并掌握等比数列的前n项和公式，理解等比数列的通项公式与前n项和公式的关系.

③能在具体的问题情境中，发现数列的等比关系，并解决相应的问题.

④体会等比数列与指数函数的关系.

(4)*数学归纳法

了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明数列中的一些简单命题.

考向（三）关注浙江、江苏、北京、上海

2023 届苏锡常镇四地一模 2023.3.21

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，若对任意正整数 n，$S_{n+1}=-3a_{n+1}+a_n+3$，$S_n+a_n>(-1)^n a$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-1,\frac{3}{2})$　　B. $(-1,\frac{5}{2})$　　C. $(-2,\frac{5}{2})$　　D. $(-2,3)$

答案 C

2022 届苏锡常镇四市高三 5 月调研(二)

16. 第十四届国际数学教育大会（简称 ICME-14）于 2021 年 7 月在上海举办，会徽的主题图案（如图）有着丰富的数学元素，展现了中国古代数学的灿烂文明，其右下方的“卦”是用中国古代的计数符号写出的八进制数字 3745. 八进制有 0~7 共 8 个数字，基数为 8，加法运算时逢八进一，减法运算时借一当八. 八进制数字 3745 换算成十进制是 $5\times8^0+4\times8^1+7\times8^2+3\times8^3=2021$，表示 ICME-14 的举办年份. 设正整数 $n=a_0\cdot8^0+a_1\cdot8+\cdots+a_i\cdot8^i+\cdots+a_k\cdot8^k$，其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$i=0,1,\cdots,k$，$k\in\mathbf{N}$. 记 $\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，$S(n)=\omega(1)+\omega(2)+\cdots+\omega(8n)$，则 $\omega(72)=$ ▲ ；当 $n\leqslant7$ 时，用含 n 的代数式表示 $S(n)=$ ▲ .（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

（第 16 题图）

答案：16. 2；$4n^2+25n$

2022 届江苏省苏州市高三考前模拟试卷数学试题

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n^2-a_{n-1}^2=p$（$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$，p 为非零常数），则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”，p 称为“公方差”，下列对“等方差数列”的判断正确的是

A. $\{(-1)^n\}$ 是等方差数列

B. 若正项等方差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且 a_1，a_2，a_5 是等比数列，则 $a_n^2=2n-1$

C. 等比数列不可能为等方差数列

D. 存在数列 $\{a_n\}$ 既是等方差数列，又是等差数列

答案 BC

2022 届苏州市 2021-2022 学年高三期中考试调研 2021.11

8. 设数列$\{a_m\}(m\in\mathbf{N}^*)$，若存在公比为 q 的等比数列$\{b_{m+1}\}(m\in\mathbf{N}^*)$，使得$b_k<a_k<b_{k+1}$，其中$k=1,2,\cdots,m$，则称数列$\{b_{m+1}\}$为数列$\{a_m\}$的“等比分割数列”，则下列说法错误的是

A. 数列$\{b_5\}$;2, 4, 8, 16, 32 是数列$\{a_4\}$: 3, 7, 12, 24 的一个“等比分割数列”

B. 若数列$\{a_n\}$存在“等比分割数列”$\{b_{n+1}\}$，则有$a_1<\cdots<a_{k-1}<a_k<\cdots<a_n$和$b_1<\cdots<b_{k-1}<b_k<\cdots<b_n<b_{n+1}$成立，其中$2\leqslant k\leqslant n$, $k\in\mathbf{N}^*$

C. 数列$\{a_3\}$: -3, -1, 2 存在“等比分割数列”$\{b_4\}$

D. 数列$\{a_{10}\}$的通项公式为$a_n=2^n(n=1,2,\cdots,10)$，若数列$\{a_{10}\}$的“等比分割数列”$\{b_{11}\}$的首项为 1，则公比$q\in(2,2^{\frac{10}{9}})$

2022 届浙江省 Z20 名校联盟(名校新高考研究联盟)2022 届高三第一次联考

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}(n\in N^*)$，则下列选项正确的是

A. $a_{2021}<a_{2020}$　　B. $\frac{2021}{4043}<a_{2021}<1$　　C. $0<a_{2021}<\frac{2021}{4043}$　　D. $a_{2021}>1$

答案 B

2023 届武汉二调 2023.2.14

12. 已知函数$f(x)=\sin x+\ln x$，将$f(x)$的所有极值点按照由小到大的顺序排列，得到数列$\{x_n\}$，对于正整数n，则下列说法中正确的有

A. $(n-1)\pi<x_n<n\pi$　　B. $x_{n+1}-x_n<\pi$

C. $\left\{\left|x_n-\frac{(2n-1)\pi}{2}\right|\right\}$为递减数列　　D. $f(x_{2n})>-1+\ln\frac{(4n-1)\pi}{2}$

2023 届浙江省 Z20 名校联盟（名校新高考研究联盟）高三上学期第一次联考数学试题

13. 函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期为____▲____.

第 14 题图

14. 毕达哥拉斯树是由古希腊数学家毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的图形，因为重复数次后的形状好似一棵树，所以被称为毕达哥拉斯树，也叫“勾股树”.毕达哥拉斯树的生长方式如下：以边长为 1 的正方形的一边作为斜边，向外做等腰直角三角形，再以等腰直角三角形的两直角边为边向外作正方形，得到 2 个新的小正方形，实现了一次生长，再将这两个小正方形各按照上述方式生长，如此重复下去，设第n次生长得到的小正方形的个数为a_n，则数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=$____▲____.

答案$2^{n+1}-2$

教育部 2020 届山东省高考模拟考试 2019.11.30

22．（12 分）

函数 $f(x)=\dfrac{a+x}{1+x}\ (x>0)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\dfrac{11}{2}$.

（1）求 a；

（2）讨论 $g(x)=x(f(x))^2$ 的单调性；

（3）设 $a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，证明：$2^{n-2}|2\ln a_n-\ln 7|<1$.

解：（1）$\because f'(x)=\dfrac{1-a}{(1+x)^2},\therefore k=f'(1)=\dfrac{1-a}{4}$　　又 $f(1)=\dfrac{a+1}{2}$，

所以切线方程为：$y-\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{1-a}{4}(x-1)$　　即：$y=\dfrac{1-a}{4}x+\dfrac{3a+1}{4}$

又切线在 y 轴上截距为 $\dfrac{11}{2}$，所以 $\dfrac{3a+1}{4}=\dfrac{11}{2},\therefore a=7$

（2）由（1）得 $f(x)=\dfrac{x+7}{1+x}$ 则 $g(x)=x(\dfrac{x+7}{1+x})^2$, 定义域为 $(0,+\infty)$

$$g'(x)=(\frac{x+7}{1+x})^2+2x(\frac{x+7}{1+x})\frac{(1+x)-(x+7)}{(1+x)^2}$$

$$=(\frac{x+7}{1+x})^2+2x(x+7)\frac{-6}{(1+x)^3}=\frac{(x+7)(x^2-4x+7)}{(1+x)^3}>0$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（3）要证 $2^{n-2}|2\ln a_n-\ln 7|<1$

即证 $|\ln\dfrac{a_n{}^2}{7}|<\dfrac{1}{2^{n-2}}$

当 n=1 时，$\ln 7<2$ 成立

即证 $|\ln\dfrac{a_{n+1}{}^2}{7}|<\dfrac{1}{2^{n-1}}$

即证 $|\ln\dfrac{a_{n+1}{}^2}{7}|<\dfrac{1}{2}|\ln\dfrac{a_n{}^2}{7}|$

由题意得 $a_n>0$

即证 $|\ln\dfrac{a_{n+1}{}^2}{7}|<|\ln\dfrac{a_n}{\sqrt{7}}|$

$\because a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$，$\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n+7}{a_n+1}$

$$a_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{a_n+7}{a_n+1}-\sqrt{7}=\frac{(a_n-7)(1-\sqrt{7})}{a_n+1}$$

由 $a_n>0$ 即 $a_n-\sqrt{7}$ 与 $a_{n+1}-\sqrt{7}$ 异号

（1）当 $a_n>\sqrt{7}$，$0<a_{n+1}<\sqrt{7}$，即证 $\ln\dfrac{7}{a_{n+1}{}^2}<\ln\dfrac{a_n}{\sqrt{7}}$

即证 $\dfrac{7}{a_{n+1}{}^2}<\dfrac{a_n}{\sqrt{7}}$

即证 $a_n a_{n+1}{}^2>7\sqrt{7}$

即证 $a_n(\dfrac{7+a_n}{1+a_n})^2>7\sqrt{7}$

由（2）知，当 $a_n>\sqrt{7}$ $g(a_n)>g(\sqrt{7})=7\sqrt{7}$ 成立

（2）当 $a_{n+1}>\sqrt{7}$，$0<a_n<\sqrt{7}$，即证 $\ln\dfrac{a_{n+1}{}^2}{7}<\ln\dfrac{\sqrt{7}}{a_n}$

即证 $\dfrac{a_{n+1}{}^2}{7}<\dfrac{\sqrt{7}}{a_n}$

即证 $a_n a_{n+1}{}^2<7\sqrt{7}$

即证 $a_n(\dfrac{7+a_n}{1+a_n})^2<7\sqrt{7}$

由（2）知，当 $0<a_n<\sqrt{7}$ $g(a_n)<g(\sqrt{7})=7\sqrt{7}$ 成立

综上：$2^{n-2}|2\ln a_n-\ln 7|<1$ 得证

教育部四省适应性测试试题 2023.2.23

15．数学家祖冲之曾给出圆周率π的两个近似值："约率" $\frac{22}{7}$ 与"密率" $\frac{355}{113}$．它们可用"调日法"得到：称小于3.1415926的近似值为弱率，大于3.1415927的近似值为强率．由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，取3为弱率，4为强率，得 $a_1=\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$，故 a_1 为强率，与上一次的弱率3计算得 $a_2=\frac{3+7}{1+2}=\frac{10}{3}$，故 a_2 为强率，继续计算，……．若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推．已知 $a_m=\frac{22}{7}$，则 $m=$__________；$a_8=$__________．

答案 6，$\frac{47}{15}$