“高观点”下高考导数压轴题命题探究

高三数学　李　晗

“高观点”是指从高等数学的视角来审视、理解初等数学问题；用高等数学的知识、思想和方法来分析高考试题的命题背景和命题规律，以求从更高的观点理解试题的**数学本质**，**拓宽破题视野**，**直击问题命脉**。

“牛刀杀鸡法”

目 录

CONTENTS

01

“高观点”问题的提出

“高观点”问题的提出

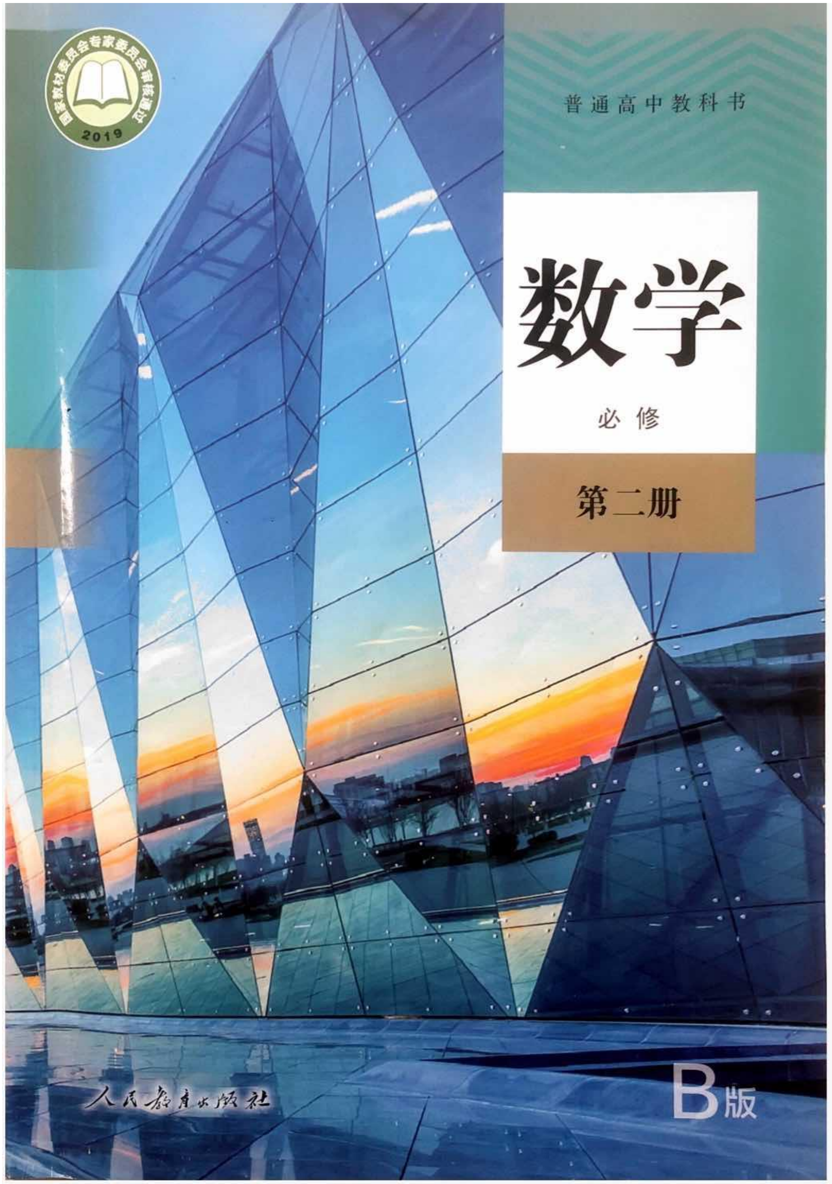
通过高中数学课程的学习，学生能获得**进一步学习以及未来发展**所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称“四基”）；提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力（简称“四能”）。

一核、四层、四翼

“高观点”问题的提出

“数学教师要努力提升数学专业素养，理解与高中数学关系密切的高等数学的内容，能够从**更高的观点**理解高中数学知识的**本质**”

“高观点”问题的提出



设 $f(x)=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ 与 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

的大小，并证明.

设 $f(x)=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ 与 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

的大小，并证明.

一、函数凹凸性定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，

(1) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数，如图 1-3-3；

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数，如图 1-3-4.

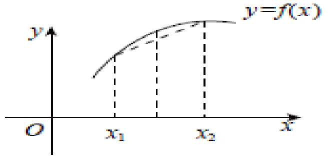


图 1-3-3

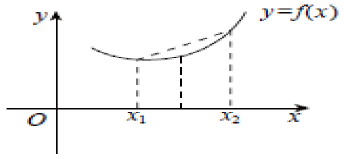
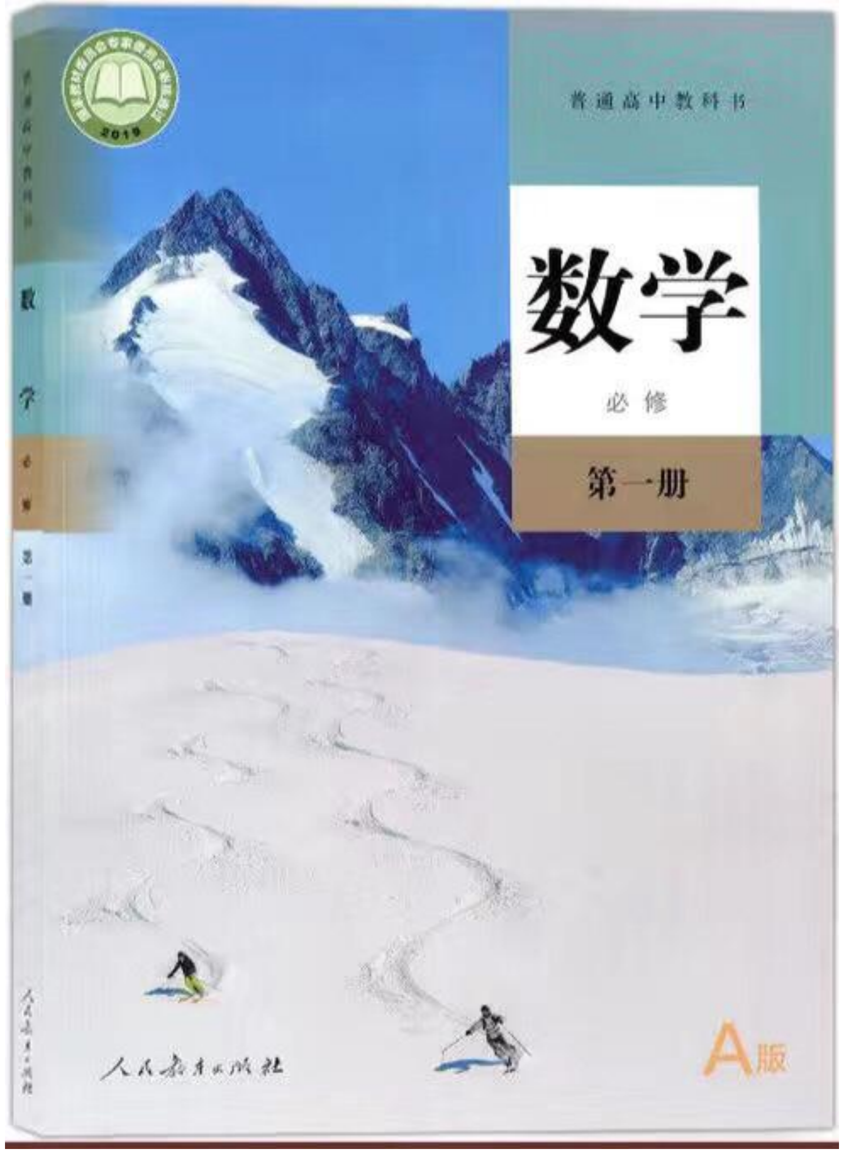


图 1-3-4

二、函数凹凸判别法

定理 (1) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数；
(2) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数.

“高观点”问题的提出



26. 英国数学家泰勒发现了如下公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

其中 $n! = 1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$.

这些公式被编入计算工具，计算工具计算足够多的项就可以确保显示值的精确性. 比如，用前三项计算 $\cos 0.3$，就得到 $\cos 0.3 \approx 1 - \frac{0.3^2}{2!} + \frac{0.3^4}{4!} = 0.955\ 337\ 5$.

试用你的计算工具计算 $\cos 0.3$，并与上述结果比较.

泰勒公式的精髓“多项式逼近”

1．（2022•新高考Ⅰ）设 $a = 0.1e^{0.1}$， $b = \frac{1}{9}$， $c = -ln0.9$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

2．（2022•全国甲卷）已知 $a = \frac{31}{32}$， $b = \cos\frac{1}{4}$， $c = 4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

A．$c>b>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

02

” 高观点“的历史和发展

”高观点“的历史和发展

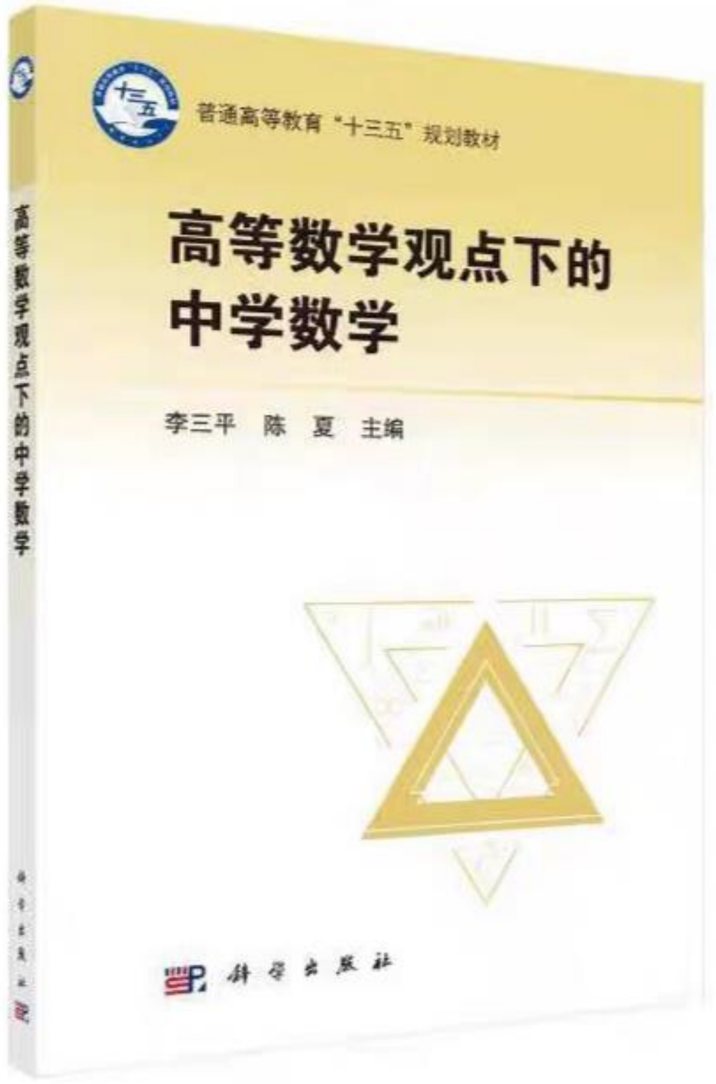
菲利克斯•克莱因

“高观点”起源于二十世纪初的克莱因—贝利运动，德国数学家菲利克斯·克莱因在**《高观点下的初等数学》**中倡导，基础数学教师应站在更高的观点来审视和理解初等数学问题，理由是：**只有观点高了，事物才显得明了而简单。**

美国二十世纪六十年代的“新数运动”旨在用现代数学改造传统数学。“新数运动”失败的主要原因是没有考虑中学生的认知实际，**高等数学只能对中学数学指导作用，而不能替代。**

杰罗姆•布鲁纳

” 高观点“的历史和发展



我国从八十年代开始，特别是二十一世纪初开始的新课改，越来越重视高等数学与中等数学的联系。《高等数学观点下的中学数学》已列为十三五规划教材，成为数学课程论研究生的必修课。

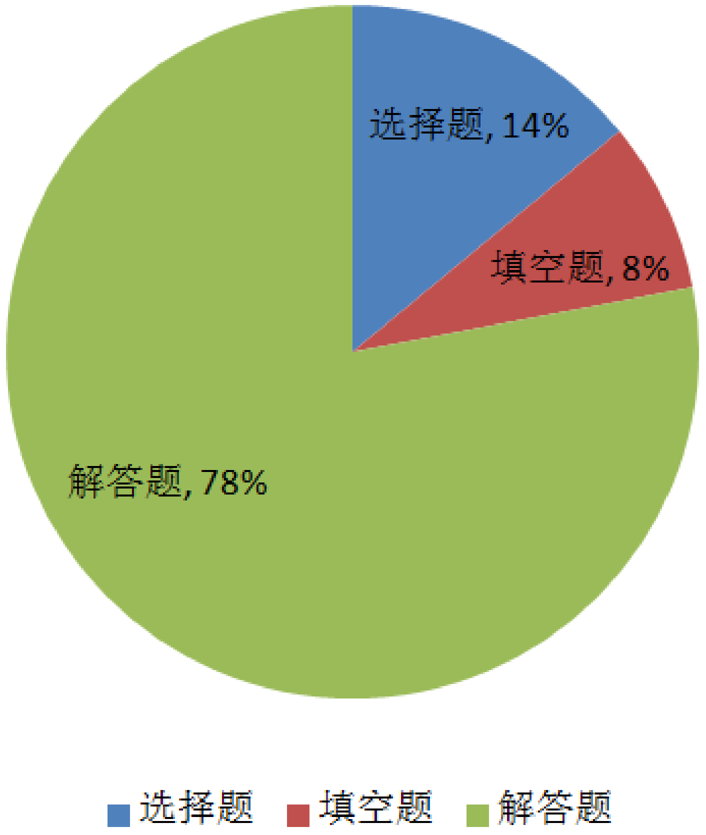
我国的“高观点”明确了中学教师应从高等数学的观点来审视和分析初等数学问题，将“高观点”渗透到日常教学中，**以引领学生抓住数学的本质，掌握数学的精髓，**提升学生的数学素养。

03

以”高观点“命题的统计分析

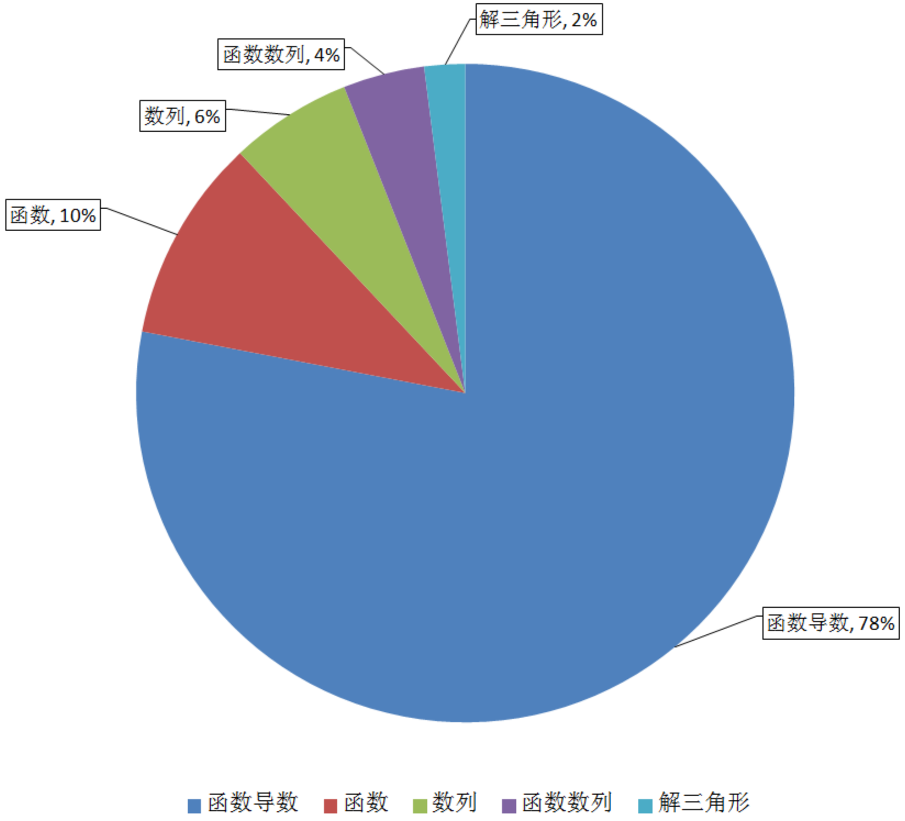
”高观点“命题的统计学理论支持

近十年“高观点”高考题统计分析



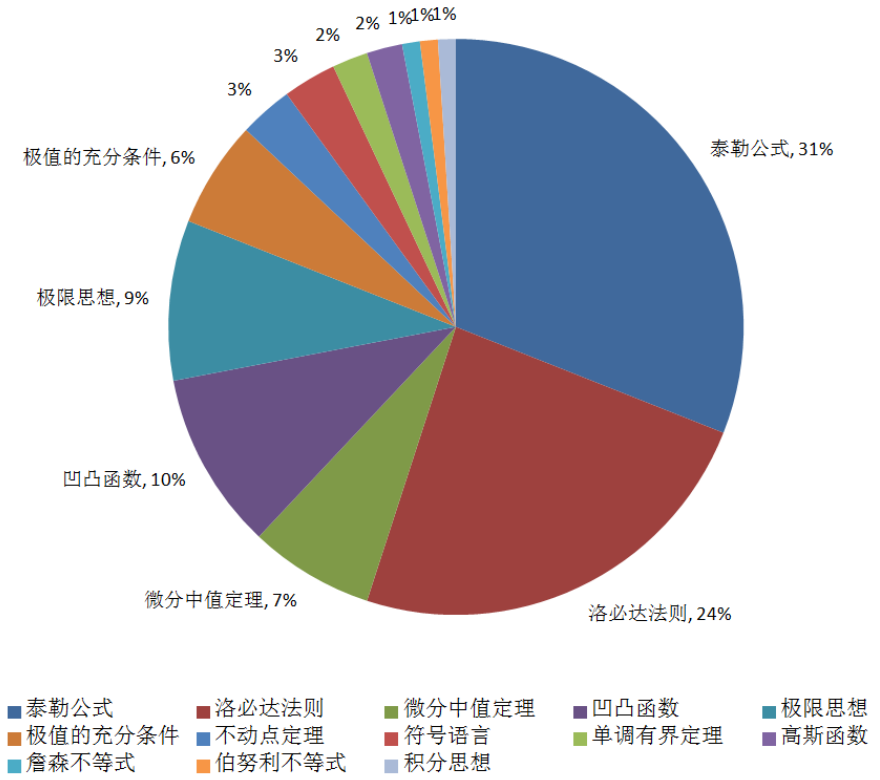
从题型上看，　主要考察解答题，避免了直接应用高等数学结论得解，体现了高考的公平性。

” 高观点 “命题的统计学理论支持



从知识衔接上看，**函数导数**是高考试题中高等数学的切入点。这些知识点是后续进行高等数学知识学习的基础、关键，这充分体现了高考试题的**衔接性**。

”高观点“命题的统计学理论支持



从高观点试题涉及的背景知识点上来看，以**泰勒公式、洛必达法则、凹凸性**为主，多达十三种。这些知识点大部分布在大学一年级第一学期的高等数学中，这充分体现了高观点试题的**选拔性**。

”高观点“命题的统计学理论支持

01.基本定义和性质为背景

2012 新课标卷理 21 题 函数的凹凸性、泰勒公式

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$

（2）若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值.

02.重要定理和公式为背景

2009 年辽宁卷理 21 题 拉格朗日中值定理

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，$(a>1)$.

（2）证明：若 $a<5$，则对于任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$.

高等数学

03.著名不等式为背景

2021 年浙江卷 17 题 柯西不等式

已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}(\vec{c}\neq\vec{0})$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$．记平面向量 $\vec{d}$ 在 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向上的投影分别为 x，y，$\vec{d}-\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 方向上的投影为 z，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是 ____.

04.重要思想方法为背景

2015 年新课标 II （常微分）方程思想

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D．$(0,1)\cup(1,+\infty)$

04

利用高等数学知识如何命制高考题

主要命题方法

演绎变形加参

2017 年全国卷 II 文 21 题

设函数 $f(x)=(1-x^2)\cdot e^x$.

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求实数 a 的取值范围.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$1+x\le e^x \Rightarrow 1-x\le e^{-x} \Rightarrow (1-x)e^x\le 1$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)\le 1+ax \Leftarrow (1-x^2)e^x\le 1+ax \Leftarrow (1-x^2)e^x\le 1+x$$

以泰勒公式和凹凸性为背景命题展示

背景知识

一、函数凹凸性定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

(1) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数，如图 1-3-3；

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数，如图 1-3-4.

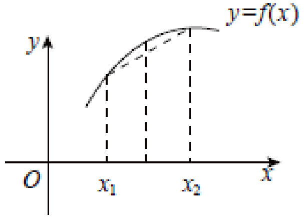


图 1-3-3

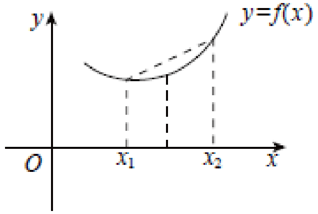


图 1-3-4

二、函数凹凸判别法

定理 (1) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数；

(2) 若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为凸函数.

3.3 泰勒公式

(1)定理

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 n+1 阶可导，则：

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x);$$

其中：$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

拉格朗日余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间

佩亚洛型余项 $R_n(x)=o(x-x_0)^n$;

当 $x_0=0$ 时 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ 也被称为麦克劳林公式。

注意：泰勒公式是利用从一点开始，无限逼近的思想来求 $f(x)$ 的近似解，因此当 x 离 x_0 越远时，近似解的误差越大。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

母题呈现

(2020年全国Ⅰ卷理科21题）已知函数$f(x)=e^x+ax^2-x$

(1)当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性;

(2)当$x\geq 0$时，$f(x)\geq \frac{1}{2}x^3+1$，求$a$的取值范围.

知识点考查

1、应用导数研究函数的单调性
2、分类讨论、分离参数、构造函数确定参数的取值范围

核心素养考查

本题涵盖了数学抽象、数学运算、数学建模的核心素养。

高等数学背景

1、泰勒公式
2、函数的凹凸性

第二问等价于

当$x \geq 0$时，$e^x \geq 1+x-ax^2+\frac{1}{2}x^3$，求$a$的取值范围

中学解法

法一：构造函数

$$h(x)=e^x-1-x+ax^2-\frac{1}{2}x^3$$

法二：参变分离

$$x>0\text{时，}\ a \geq \frac{1+x+\frac{1}{2}x^3\text{-}e^x}{x^2}$$

“高观点”背景分析

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2+\boxed{\frac{1}{6}}x^3$$

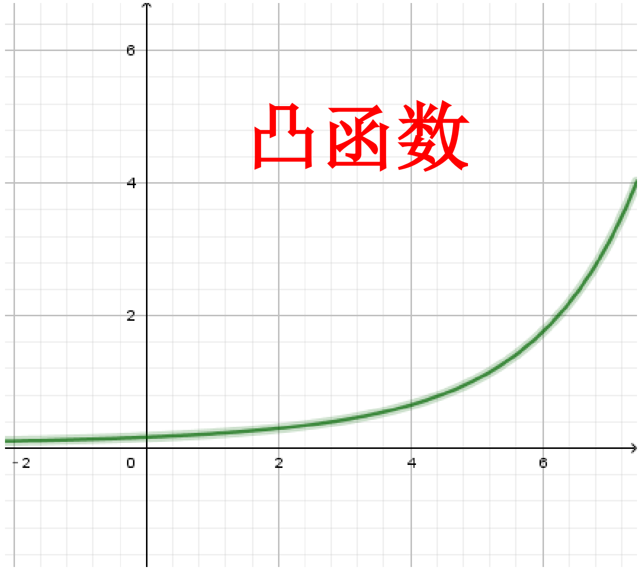
$$e^x \geq 1+x-ax^2+\boxed{\frac{1}{2}}x^3$$

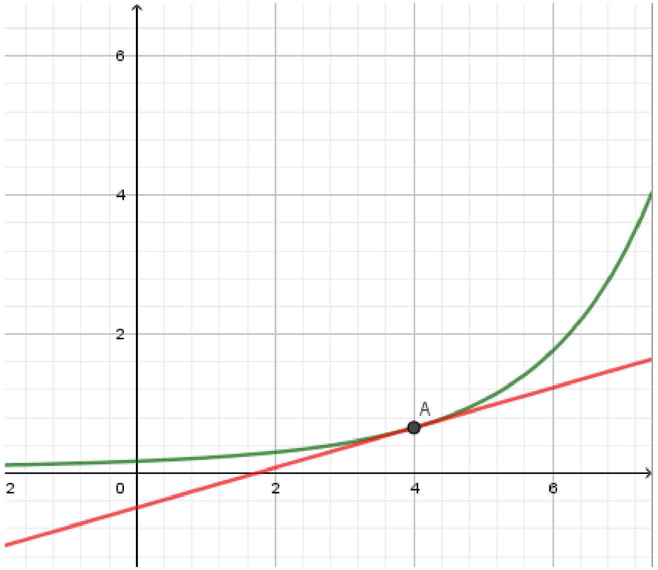
泰勒加强

科学性分析

$x>0$时，$e^x \geq 1+x-ax^2+\frac{1}{2}x^3$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{e^x-x-1}{x^2}} \geq \frac{1}{2}x-a$

GGB作图



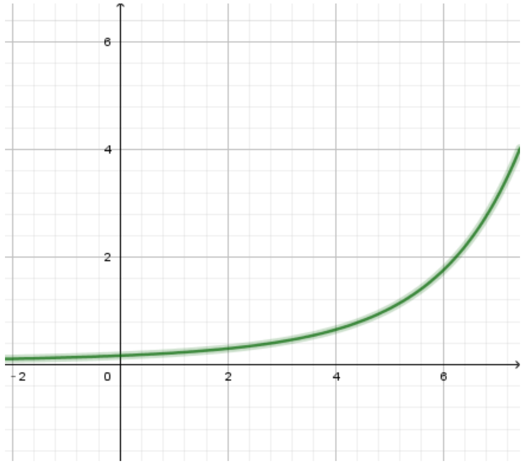


所以需算出$g(x)$一条斜率为$\frac{1}{2}$的切线方程

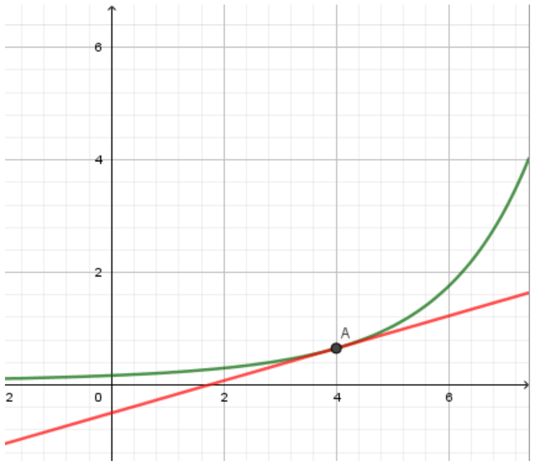
只要$-a$小于该切线方程的y轴上的截距即可

以凸函数和泰勒公式为背景命题展示

$x>0$时，$e^x \geq 1+x-ax^2+\frac{1}{2}x^3$ $\Rightarrow$ $\frac{e^x-x-1}{x^2} \geq \frac{1}{2}x\boxed{-a}$



令$g(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$，则$g'(x)=\frac{(x-2)e^x+x+2}{x^3}$，易证$g''(x)>0$，



令切点为(x_0,y_0)，则$\frac{(x_0-2)e^{x_0}+x_0+2}{x_0^{\ 3}}=\frac{1}{2}$，求得$x_0=2$或$x_0=0$(舍)

所以$x_0=2$时，切线方程为$y=\frac{1}{2}x+\boxed{\frac{e^2-7}{4}}$

因此推测命题人应当是从此角度命题，以实现试题的科学性

常规推广：

$x>0$时， $e^x \ge 1+x-ax^2+\boxed{\frac{1}{2}x^3}$

$x>0$时， $e^x \ge 1+x+ax^2+\boxed{bx^3}$

$$\frac{e^x-x-1}{x^2} \ge bx+a$$

$$b=\frac{(x_0-2)e^{x_0}+x_0+2}{x_0^{\ 3}}$$

令$x_0=1, b=3-e, a=2e-5$

更改b的值

$e^x \ge 1+x+ax^2\boxed{+bx^3}$

$e^x \ge 1+x+ax^2+\boxed{(3-e)x^3}$

设计命题1：

已知函数$f(x)=e^x-ax^2-x$,

(1) 当$a=1$时，$f(x)$的单调区间；

(2) 当$x \ge 0$时，$f(x) \ge (3-e)x^3+1$，求a的取值范围。

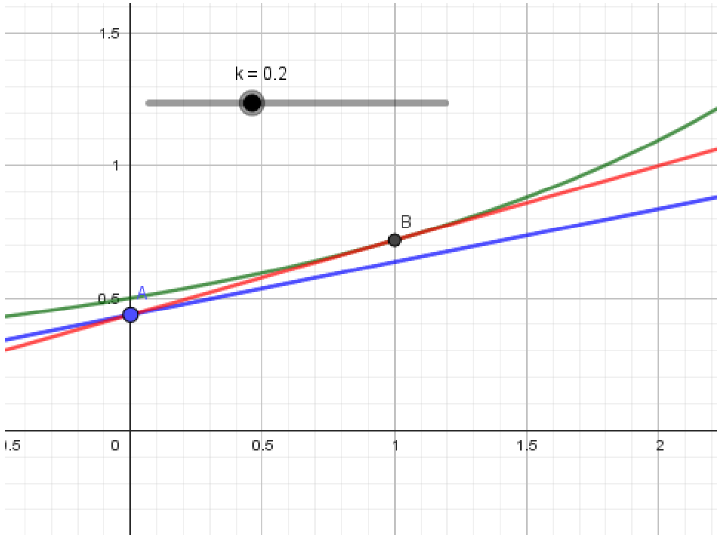
常规推广：

$x>0$时，$e^x \geq 1+x+ax^2+bx^3$ $\Rightarrow$ $\dfrac{e^x-x-1}{x^2} \geq bx+a$

a定b动

$e^x \geq 1+x+ax^2+bx^3$

$e^x \geq 1+x+\boxed{(2e-5)x^2}+bx^3$



设计命题2：

已知函数$f(x)=e^x-(2e-5)x^2-x$，

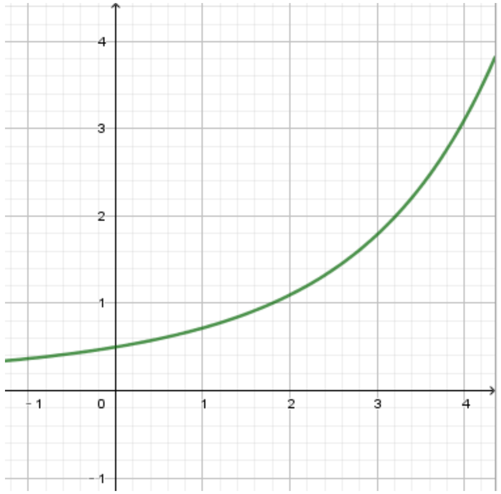
(1) 求$f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程；

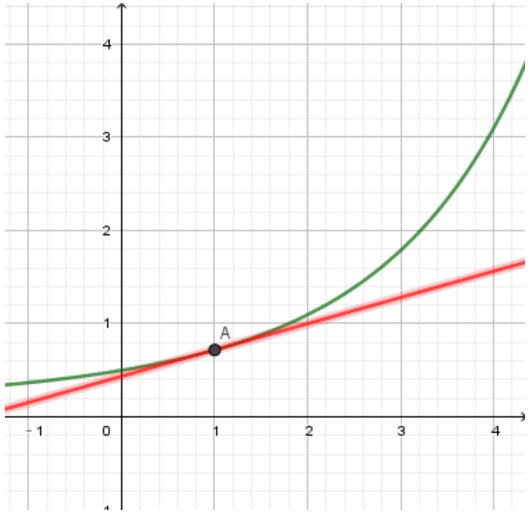
(2) 当$x \geq 0$时，$f(x) \geq bx^3+1$，求b的取值范围。

以此类比 可以令$x_0=3、4、5\ldots$ 等任意值设计出不同的题目

进一步推广，增加x的次数

$x>0$时，$e^x \ge 1+x+\frac{1}{2}x^2+ax^3+bx^4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}{x^3} \ge bx+a$





$$令g(x)=\frac{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}{x^3},则g'(x)=\frac{(x-3)e^x+3+2x+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$$

由$g''(x)>0$，易证$g(x)$为凸函数

令切点(x_0,y_0),则$b=g'(x_0)$

进一步推广

$x>0$时，$e^x \ge 1+x+\frac{1}{2}x^2+ax^3+bx^4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}{x^3} \ge bx+a$

令$x_0=3$,则$b=\frac{1}{6}$

令$x_0=1$,则$a=3e-8$

设计命题3：b定a动

已知函数$f(x)=e^x-ax^3-\frac{1}{2}x^2-x$,

(1)当$a=0$时，求$f(x)$的单调增减区间。

(2)当$x\ge 0$时，$f(x)\ge \frac{1}{6}x^4+1$，求a的取值范围。

设计命题4：a定b动

已知函数$f(x)=e^x-(3e-8)x^3-\frac{1}{2}x^2-x$,

(1)求$f(x)$在（1，$f(1)$)处的切线方程.

(2)当$x\ge 0$时，$f(x)\ge bx^4+1$，求b的取值范围。

一般化推广，探寻规律性结论

$$x>0\text{时，}\quad e^x \geq 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots\ldots+ax^n+\frac{1}{n!}x^{n+1}$$

$$x>0\text{时，}\frac{e^x-(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1})}{x^n}\geq\frac{1}{n!}x+a$$

$$\text{令}g(x)=\frac{e^x-(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1})}{x^n}$$ **（易证为凸函数）**

$$\text{则}g'(x)=\frac{(x-n)e^x+\left[n+(n-1)x+(\frac{n}{2!}-1)x^2+\ldots+(\frac{n}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-2)!})x^{n-1}\right]}{x^{n+1}}$$

$$\text{令}(x_0,y_0)\text{为切点，则}g'(x_0)=\frac{1}{n!}$$

$$\text{则}a=\frac{1}{n^n}\left[e^n-(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{(n-1)!})\right]$$

一般化推广，增加n的次数

$$x>0\text{时，}\quad e^x \ge 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots\ldots+ax^n+\frac{1}{n!}x^{n+1}$$

规律性结论

令(x_0, y_0)为切点，则$g'(x_0)=\dfrac{1}{n!}$

则$a=\dfrac{1}{n^n}\left[e^n-(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\ldots+\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{n^n}{(n-1)!})\right]$

(理论上n取不同值，则可设计出不同的题目)

令$n=1$, 则$a=e-2$

设计命题5

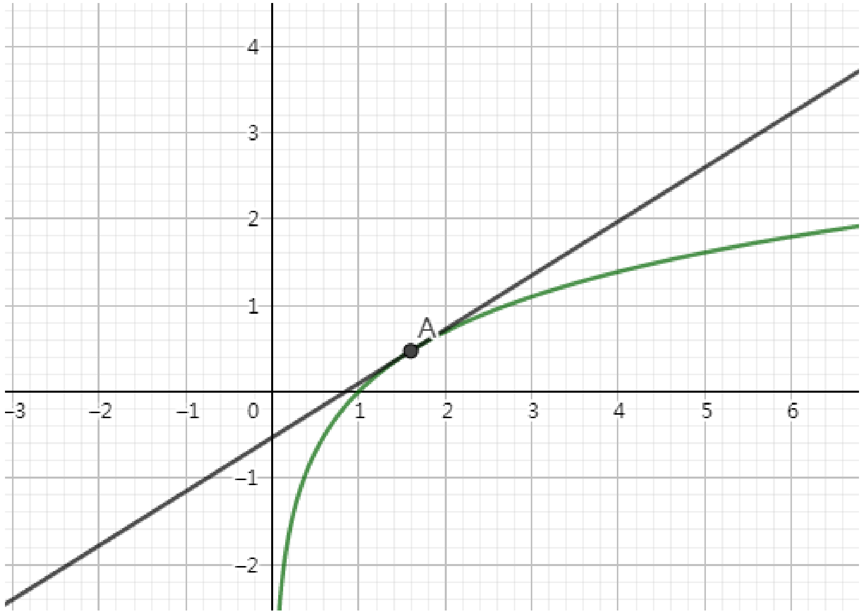
已知函数$f(x)=e^x-1-ax-x^2$,

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的单调增减区间

(2)当$x\ge 0$时，$f(x)\ge 0$，求a的取值范围。

从改题到编题

$$f(x)=\ln x$$



设计命题6

已知函数$f(x)=\ln x-ax-b$,

(1)当$b=-1$时，$f(x)\leq 0$，求a的取值范围。

(2)当$a=1$时，$f(x)\leq 0$，求b的取值范围。

从改题到编题

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

两式相减

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots)$$

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})\geq 2(x+\frac{x^3}{3})$$

设计命题7

已知函数 $=\ln(1+x)-\dfrac{x^2}{2}$

当0 $\in(0, +\infty)$， $f(x)<kx$恒成立， 求k的取值范围

设计命题8

已知函数$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(1)当x $\in(0, 1)$， 证明: $\dfrac{f(x)}{x}>2(1+\dfrac{x^2}{2})$；

(2)当x $\in(0, 1)$，$\dfrac{f(x)}{x}>a(1+\dfrac{x^2}{2})$， 求$a$的取值范围.

05

”高观点“对学生备考的指导意义

直接应用高数知识：秒破比较大小题

（2022•新高考Ⅰ）设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-ln0.9$，则(　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

中学解法

设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$，因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{1}{9})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{10}{9}-\frac{1}{9}<0$，故 $\frac{1}{9}>\ln\frac{10}{9}=-\ln0.9$，即 $b>c$，

所以 $f(-\frac{1}{10})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{9}{10}+\frac{1}{10}<0$，故 $\frac{9}{10}<e^{-\frac{1}{10}}$，所以 $\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}<\frac{1}{9}$，

故 $a<b$，

设 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x<1)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$，

令 $h(x)=e^x(x^2-1)+1$，$h'(x)=e^x(x^2+2x-1)$，

当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)=e^x(x^2-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)=e^x(x^2-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h(x)<0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.1)>g(0)=0$，即 $0.1e^{0.1}>-\ln0.9$，所以 $a>c$

故选：C.

泰勒展开

$$a=0.1e^{0.1}\approx0.1(1+0.1+\frac{1}{2}\times0.1^2)=0.1105$$

$$c=-\ln0.9=-\ln(1-0.1)\approx-\left[-0.1-\frac{1}{2}\times0.1^2+\frac{1}{3}\times(-0.1)^3\right]=0.1053$$

$b=\dfrac{1}{9}\approx0.1111$，所以 $c<a<b$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^n)$$

对照实验

	中学方法				泰勒展开		
	三分钟	五分钟	十分钟		三分钟	五分钟	十分钟
特优班	×	×	√	特优班	√		
实验班	×	×	√/×	实验班	√		
普通班	×	×	×	普通班	×	√	

赢得的不止是5分

应用命题原理：秒破恒成立类问题

已知函数$f(x)=e^{x}-1-x-ax^{2}$

(1)当$a=0$时，讨论$f(x)$的单调性;

(2)当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 0$，求a的取值范围.

中学解法：参变分离

$$x>0\text{时},\frac{e^{x}-1-x}{x^{2}}\geq a$$

（II）$f'(x)=e^{x}-1-2ax$

由（I）知$e^{x}\geq 1+x$,当且仅当$x=0$时等号成立．故$f'(x)\geq x-2ax=(1-2a)x$,

从而当$1-2a\geq 0$, 即$a\leq\frac{1}{2}$时, $f'(x)\geq 0\ (x\geq 0)$，而$f(0)=0$,

于是当$x\geq 0$时, $f(x)\geq 0$．

由$e^{x}>1+x\ (x\neq 0)$可得$e^{-x}>1-x\ (x\neq 0)$．

从而当$a>\frac{1}{2}$时, $f'(x)<e^{x}-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^{x}-1)(e^{x}-2a)$，

故当$x\in(0,\ln 2a)$时, $f'(x)<0$, 而$f(0)=0$, 于是当$x\in(0,\ln 2a)$时, $f(x)<0$与已知矛盾．

综合得a的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$．

分离切线

$$x>0\text{时},\frac{e^{x}-1}{x}\geq 1+ax$$

令$g(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}$

求$g''(x)$并证明$g''(x)>0$

求$g(x)$过定点(0,1)的切线的斜率

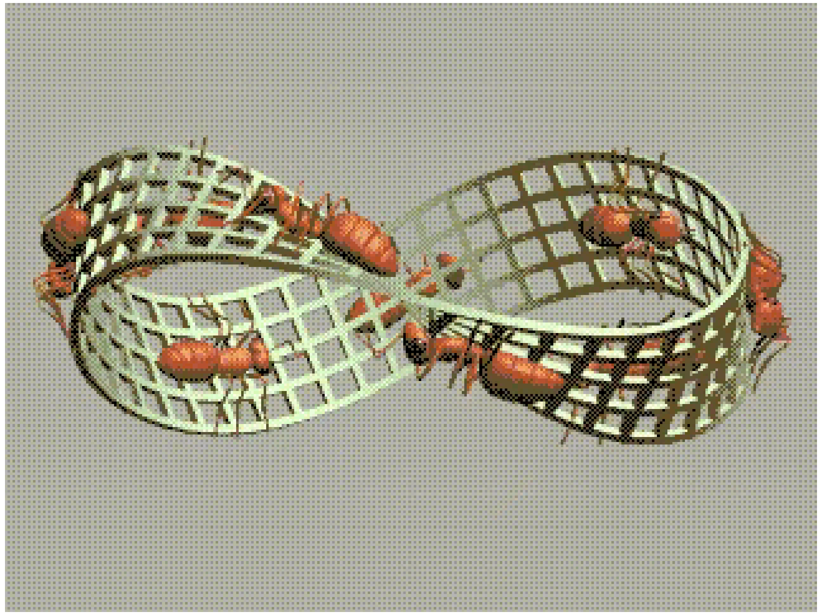
对照实验

	一般方法				分离切线		
	五分钟	十分钟	十五分钟		五分钟	十分钟	十五分钟
特优班		√		特优班	√		
实验班			√	实验班	√		
普通班			×	普通班		√	

数学解题有五种境界，**正确解题、一题多解、多题一解、发现定理、自己编题**。对教师而言，解题不能停留在前两种，更多的应该是**后三种**。

从高等数学的角度审视高考试题，直击问题本质，发现试题的**规律性**，提炼出**不变性**，从命题者的角度带给学生更宽的破题视野。

“牛刀杀鸡,速战速决”



莫比乌斯
黎曼 ⇐高斯⇐柯西⇐拉格朗日⇐欧拉⇐伯努利⇐莱布尼茨

泰勒⇐牛顿

⇒ 微积分

微积分是现代数学的基础，是初等数学与高等数学的桥梁。

也是高考压轴题的**题源**。

寻根溯源，方可在高考中**处变不惊**；

透析本质，方能在高考中**游刃有余**。

感谢各位领导及同事的倾听

市一中的工作体验，让我对教师这个职业有了更深的感悟，我坚信：一支粉笔，三尺讲台，一颗爱生如子的心，足以让我的人生写满精彩。让我们携手并肩，凝心聚力，为实现教育梦、中国梦，为创造一中更加辉煌的明天而努力奋斗、拼搏进取。