圆锥曲线中极点极线调和点列问题

新高考新方向

为什么考	**一核**	立德树人 服务选才 引导教学 考查目的
考什么	**四层**	**必备知识、关键能力、学科素养、核心价值** 四层考查目标
怎么考	**四翼**	**基础性、综合性、应用性、创新性** 四个方面的考查要求

《中国高考评价体系》的意义在于，通过解决高考“为什么考、考什么、怎么考”的问题，对“培养什么人、怎样培养人、为谁培养人”这一教育根本问题给出了在高考领域的答案，是高考是命题评价的准绳和量尺。

新高考新方向

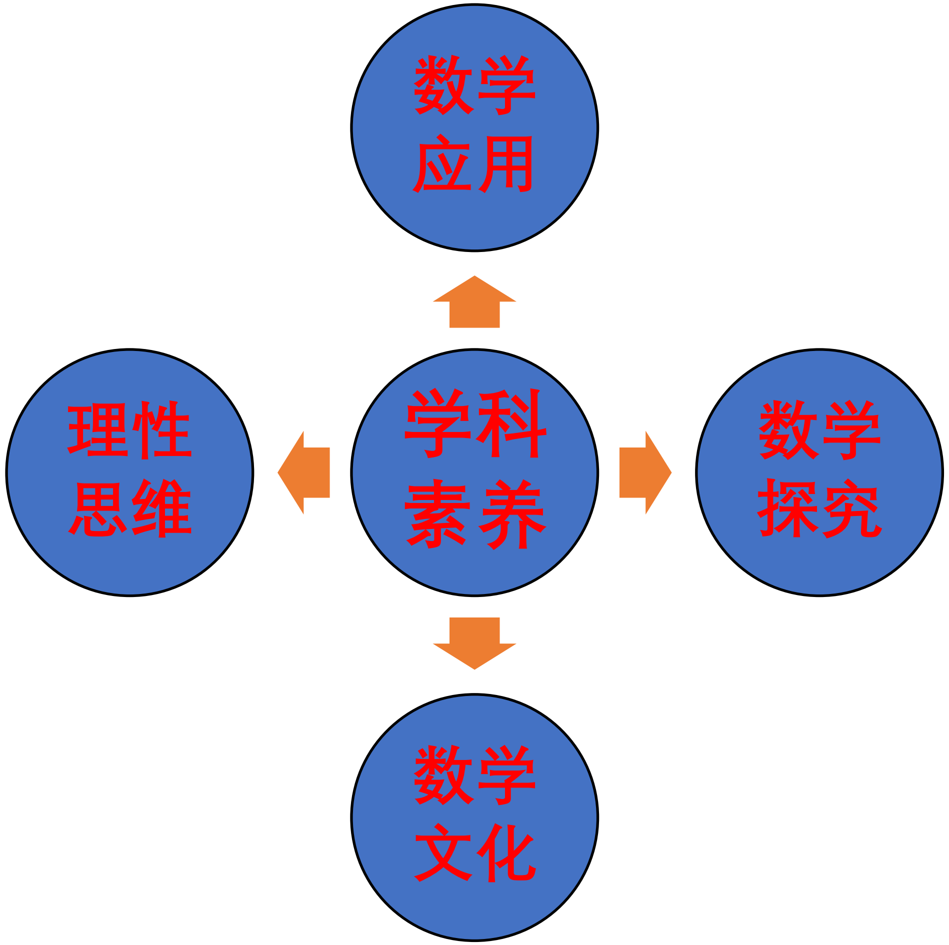
体现高考“一核四层四翼”的学科特征

高考数学四层四翼考查特点

- 以数学必备知识为基础，在知识的学习和运用中考查素养的发展水平
- 以数学思想方法为引领，在思想方法的灵活应用中体现个体差异性
- 以数学关键能力为载体，整体实现核心素养综合性的要求
- 以数学学科素养为依托，合理确定考查层次性，体现核心素养阶段性的要求

新高考新方向


数学科四层考查目标
学科素养
数学抽象
逻辑推理
数学建模
课程标准
核心素养
直观想象
数学运算
数据分析


数学应用
理性思维
学科素养
数学探究
数学文化

基于高考评价体系的
数学科考试内容改革实施路径

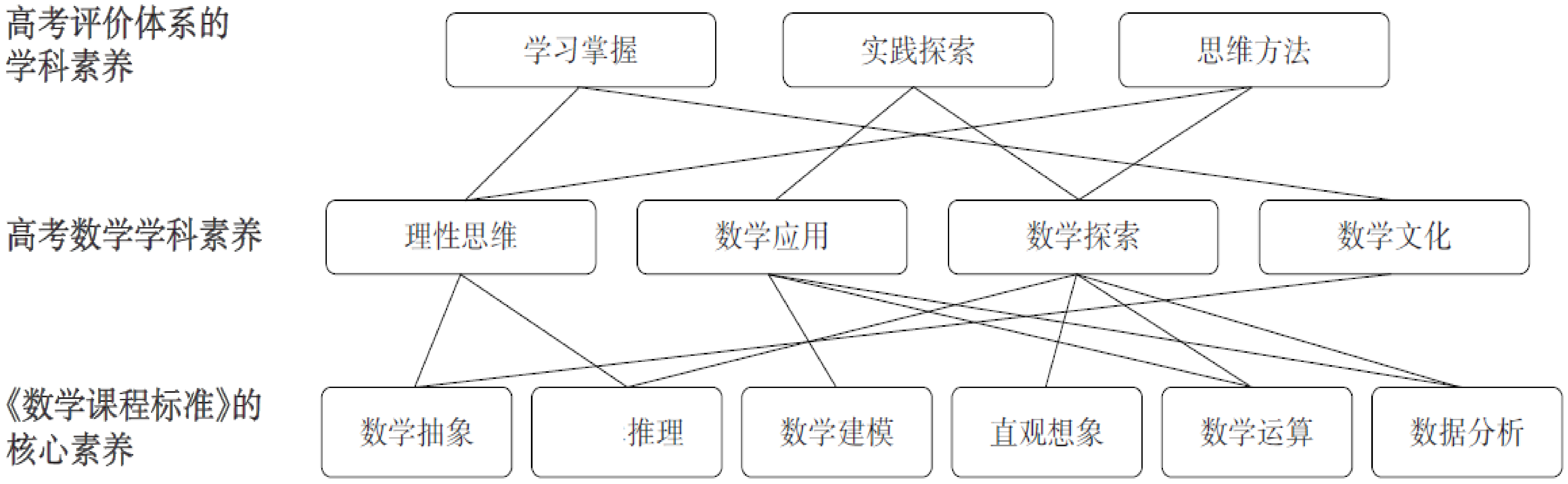


图1　学科素养与核心素养关系

影响。高考的人才选拔要求必须与新时代高等教育人才培养方向相一致、与培养要求相契合，高考考试科目的设置、考试内容的选取也必须与高等教育对于大学新生知识结构的要求相契合。因此，高考必须始终准确把握党和国家事业发展对高等教育人才选拔的要求，充分适应新形势下经济社会发

2. 推动基础教育改革，促进学生全面发展

当前，部分高中教学中还存在着“满堂灌”、机械重复训练、实验教学和实践教育不足、忽视高阶能力发展等问

在高考解析几何题当中，经常会遇到求定值、定点、以及共线等等问题. 这些问题的背后隐藏着更深层次的理论——极点极线理论. 极点极线是法国数学家笛莎格于1639年在射影几何学奠基之作《圆锥曲线论稿》中提出的.

1.2 代数定义

已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则称点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l: Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 是圆锥曲线 Γ の一对极点和极线.

事实上，在圆锥曲线方程中，以 x_0x 替换 x^2，以 $\frac{x_0+x}{2}$ 替换 x（另一变量 y 也是如此）即可得到点 $P(x_0,y_0)$ 极线方程.

特别地：

(1)对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；

(2)对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$；

(3)对于抛物线 $y^2=2px$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应の极线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$.

以椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线 l：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ 具有下列常见结论，在其他圆锥曲线中也有类似的结论，完全可以类比迁移.

结论1　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上时，极线 l 为椭圆在点 P 处的切线.

结论2　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外时，过点 P 作椭圆的两条切线，切点为 A、B，则直线 AB 就是点 P 所对应的极线 l：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

结论3　当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内部时，过点 P 作直线 m 与椭圆交于 A、B 两点，则椭圆在 A、B 处的切线的交点在极线 l：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ 上.

例 1 （2017 年高中数学联赛广东初赛第 9 题改编）直线 l：$y=x+b$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 不相交，过直线 l 上一动点 P 作椭圆的两条切线，切点为 M、N，求证：MN 过定点.

解析：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则切线 PM：$\frac{xx_1}{25}+\frac{yy_1}{9}=1$，$PN$：$\frac{xx_2}{25}+\frac{yy_2}{9}=1$，把 $P(x_0,y_0)$ 分别代入得 $\frac{x_0x_1}{25}+\frac{y_0y_1}{9}=1$，$\frac{x_0x_2}{25}+\frac{y_0y_2}{9}=1$，说明直线 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ 同时经过 M、N 两点，所以直线 MN 的方程为 $\frac{xx_0}{25}+\frac{y(x_0+b)}{9}=1$，即 $\left(\frac{x}{25}+\frac{y}{9}\right)x_0+\frac{yb}{9}=1$，令 $\frac{x}{25}+\frac{y}{9}=0$ 可得 $y=\frac{9}{b}$，$x=-\frac{25}{b}$，所以 MN 过定点 $\left(-\frac{25}{b},\frac{9}{b}\right)$，与动点 P 无关.

评注：设点 $P(x_0,x_0+b)$，则点 P 对应的极线 $\frac{xx_0}{25}+\frac{y(x_0+b)}{9}=1$ 就是直线 MN.

即 MN：$\left(\frac{x}{25}+\frac{y}{9}\right)x_0+\frac{yb}{9}=1$，由此可知 MN 过定点 $\left(-\frac{25}{b},\frac{9}{b}\right)$. 在高考答题过程中使用这些超纲结论是要扣分的，所以我们只需用极点极线来“探路”，再用“通性通法”写过程即可，如本题的解析. 限于篇幅，后文只分析思路，不再展示详细过程. 如果是选择题或者填空题，则使用极点极线的结论可以直接做出解答.

例2 （2020年全国数学联赛四川预赛第9题）直线 l 过 $P(0,1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 交于 A、B 两点，过切点 A、B 分别作抛物线的两条切线，两切线交于点 Q，求点 Q 到直线 AB 距离的最小值.

解析：设 $Q(x_0, y_0)$，由结论2可知，点 Q 所对应的极线 $\frac{y+y_0}{2}=xx_0$ 就是直线 l，因为直线 l 过 $P(0,1)$，所以 $y_0=-1$，所以 $Q(x_0,-1)$，l：$\frac{y-1}{2}=xx_0$，即 l：$2xx_0-y+1=0$. 所以点 $Q(x_0,-1)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{2x_0^2+2}{\sqrt{4x_0^2+1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{4x_0^2+1}+\frac{3}{\sqrt{4x_0^2+1}}\right)\geqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $\sqrt{4x_0^2+1}=\frac{3}{\sqrt{4x_0^2+1}}$，即 $x_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

§3. 极点与极线在教材中の体现

极点与极线反映の是圆锥曲线の基本几何性质，所以在解析几何教材中必然有所体现.

3.1　圆锥曲线の焦点与准线是一对特殊の极点与极线

如果圆锥曲线是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变为 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是椭圆の准线；如果圆锥曲线是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变为 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是双曲线の准线；如果圆锥曲线是抛物线 $y^2=2px$，当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 时，极线 $y_0y=p(x_0+x)$ 变为 $x=-\frac{p}{2}$，恰是抛物线の准线.

结论 4　过准线上的一点 P 作抛物线的两条切线，切点为 A、B，则直线 AB 经过焦点.

结论 5　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，若直线 AB 经过焦点 F，则点 P 在抛物线的准线上.

结论 6　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，直线 AB 经过焦点 F，则 $PF\perp AB$.

以上三个结论完全可以迁移到椭圆和双曲线中去，证明留给读者，此处不再赘述. 值得注意的是下面这个结论则是抛物线独有的，应该单独理解记忆.

结论 7　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，直线 AB 经过焦点 F，则 $PA\perp PB$.

例 4　(2018 年高考全国 3 卷理科第 16 题) 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C：$y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A、B 两点. 若 $\angle AMB=90°$，则 $k=$ ________.

解析：发现 $M(-1,1)$ 在抛物线的准线上，所以由结论 4 可知，点 M 所对应的极线 $y=2(x-1)$ 经过抛物线的焦点，再借助结论 7，结合题意可知，直线 AB 的方程就是 $y=2(x-1)$，所以 $k=2$.

结论 4　过准线上的一点 P 作抛物线的两条切线，切点为 A、B，则直线 AB 经过焦点.

结论 5　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，若直线 AB 经过焦点 F，则点 P 在抛物线的准线上.

结论 6　PA、PB 为抛物线的切线，A、B 为切点，直线 AB 经过焦点 F，则 $PF \perp AB$.

【例 3】(2006 年全国试卷 II21)已知抛物线 $x^2 = 4y$ の焦点为 F，A, B 是抛物线上の两动点，且 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{FB}(\lambda > 0)$，过 A, B 两点分别作抛物线の切线，并设其交点为 P.

(1)证明 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;

(2)设 ΔABP の面积为 S，写出 $S = f(\lambda)$ の表达式，并求 S の最小值.

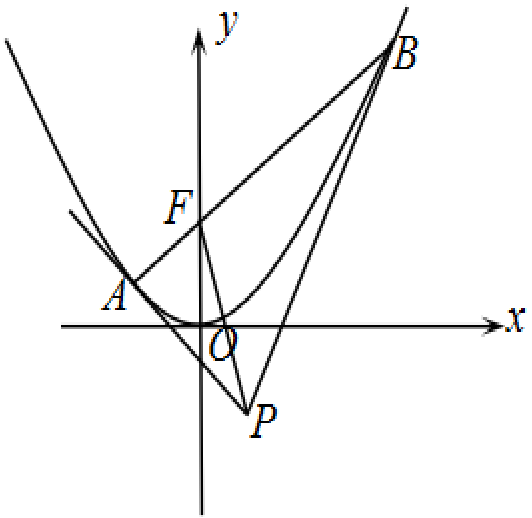


图 6

解：(1)设点 $P(x_0, -1), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，

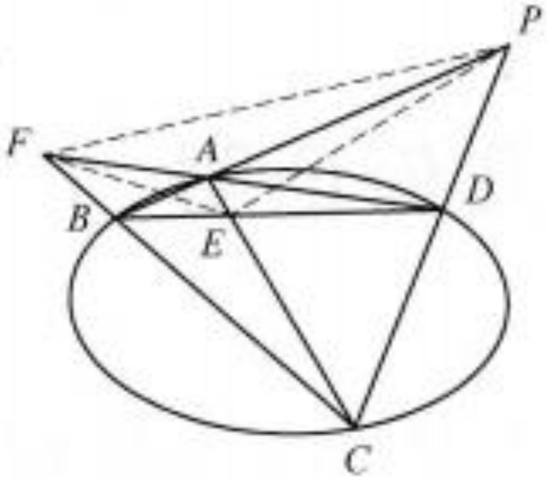
F, A, B 三点对应の极线方程分别为 $y = -1$，$x_1x = 2(y_1 + y)$，$x_2x = 2(y_2 + y)$，由于 A, B, F 三点共线，故相应の三极线共点于 $P(x_0, -1)$，代入极线方程得 $\begin{cases} x_1x_0 = 2(y_1 - 1) \\ x_2x_0 = 2(y_2 - 1) \end{cases}$，

两式相减得 $(x_1 - x_2)x_0 = 2(y_1 - y_2)$.

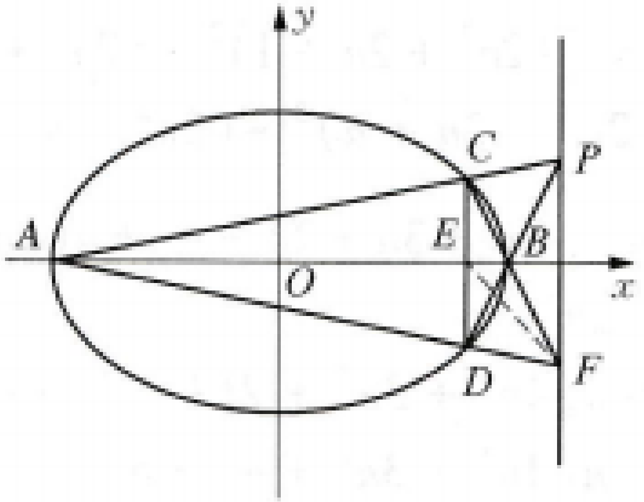
又 $\overrightarrow{FP} = (x_0, -2), \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$，故 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB} = x_0(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1) = 0$.

6　极点极线的几何定义

过椭圆外一点 P 作椭圆的两条割线，分别交椭圆于点 A、B、C、D，连接 AC、BD 交于点 E，连接 DA、CB 交于点 F，则称直线 EF 为点 P 对应的极线. 同理可知直线 EP 为点 F 对应的极线，直线 PF 为点 E 对应的极线. 所以我们把三角形 PEF 叫做“自极三角形”（见图 1）. 有了“自极三角形”，用它来为圆锥曲线中的定点问题“探路”，便可以居高临下进行解题.



例 6 （2020 年高考全国 I 卷理科第 20 题改编）椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左右顶点为 A、B，点 P 是直线 $x=6$ 上的动点，PA、PB 分别交椭圆于 C、D 两点，求证：直线 CD 过定点.



解析：连结 AB、CD 交于点 E，设 AD、CB 交于点 F，由极点极线的几何定义可知，直线 EF 为点 P 对应的极线（见图 2）. 设 $P(6, y_0)$，则 P 所对应的极线方程为 EF：$\frac{6x}{9}+yy_0=1$，显然 EF 过定点 $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，从而 CD 也经过定点 $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

例题 4 (2012 年高考北京卷理科) 已知曲线 C : $(5-m)x^2+(m-2)y^2=8\,(m\in\mathbb{R})$.

(I) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;

(II) 设 $m=4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A,B (点 A 位于点 B 的上方) , 直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M 、N, 直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G.求证: A,G,N 三点共线.

背景分析 (II) 如图 26, 直线 AN 与 BM 的交点必在点 $P(0,4)$ 的极线上, 而点 $P(0,4)$ 的极线为 $y=1$. 所以直线 AN、直线 BM、直线 $y=1$ 共点, 所以 A,G,N 三点共线.

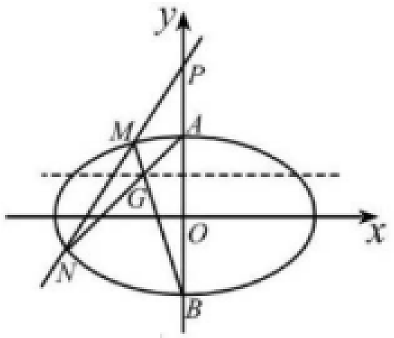
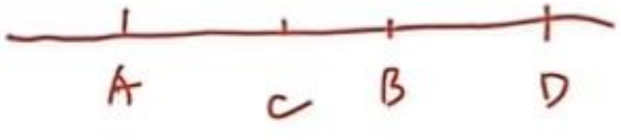


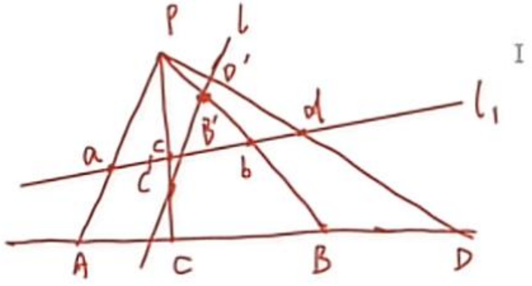
图 26

调和点列与线束



A、C、B、D成调和点列 $\Rightarrow \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$

性质1

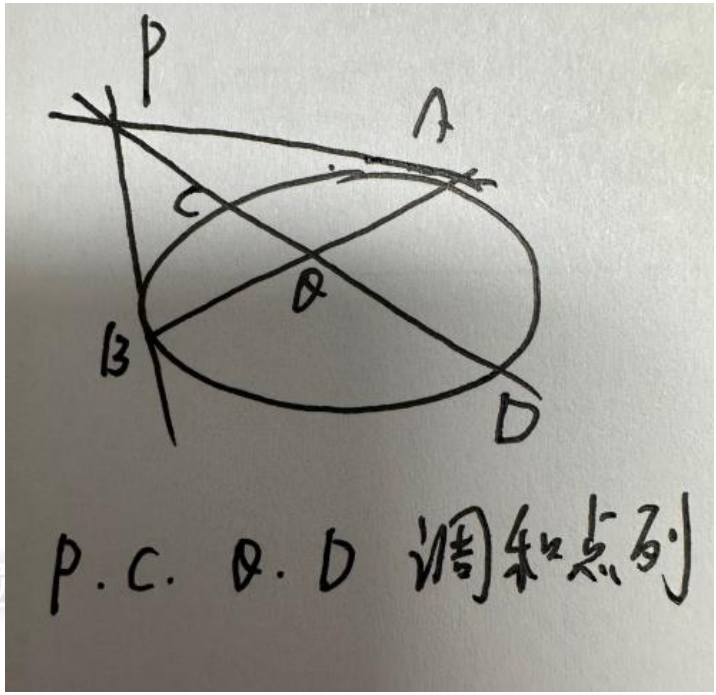


(a, c, b, d) 成调和点列.

PA, PC, PB, PD 调和点束. ☆

$c \parallel PA \Leftrightarrow C'B' = B'D'$.

性质2



调和点列与线束

(2022 高考北京卷 · 第 19 题) 已知椭圆：$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程； $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

将直线与椭圆 E 的方程联立 $\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y

整理得 $(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$，由 $\Delta>0$ 可得

$(16k^2+8k)^2-4\times(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$，

解得 $k<0$，

则 $x_1+x_2=\frac{-(16k^2+8k)}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$. (*)

直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1-1}{x_1}$，则直线 AB 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，令 $y=0$，可得点 M 的横坐标 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}$，

同理可得点 N 的横坐标 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}$，则

$$|MN|=\left|\frac{x_1}{1-y_1}-\frac{x_2}{1-y_2}\right|$$

$$=\left|\frac{x_1}{-k(x_1+2)}-\frac{x_2}{-k(x_2+2)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{k}\left(\frac{x_2}{x_2+2}-\frac{x_1}{x_1+2}\right)\right|,$$

将(*)式代入，得

$$|MN|=\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{2\sqrt{\left[\frac{-(16k^2+8k)}{1+4k^2}\right]^2-4\left(\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}\right)}}{\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(\frac{-16k^2-8k}{1+4k^2}\right)+4}\right|$$

$=2$，

即 $\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{64(2k^2+k)^2-4\times16(k^2+k)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}}}{\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+\frac{-32k^2-16k}{1+4k^2}+\frac{4+16k^2}{1+4k^2}}\right|=2$，

化简可得 $\left|\frac{\sqrt{-k}}{k}\right|=\frac{1}{2}$，

调和点列与线束

(2022 高考北京卷·第 19 题) 已知椭圆：$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程；　　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

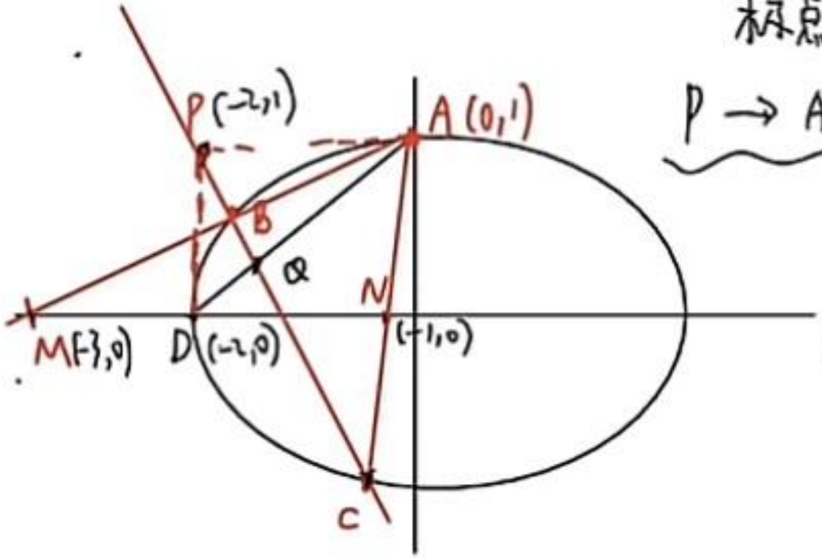
(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

$MN=2$.

极点极线 → 调和点列 → 调和线束 → { //：性质1: 长度 ; 截线束: 性质2: 调

$P \to AD$　　(P,B,Q,C)　　(AP,AB,AQ,AC)

x轴 // AP ⇒ $MD=DN=1$



l_{AN}: $y-1=x$

$\begin{cases} y-1=x \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ ⇒ $x^2+4(x+1)^2-4=0$

$5x^2+8x=0$　　$x=-\frac{8}{5}$　　$y=-\frac{3}{5}$

$C(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$　　$k=\frac{-\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}=-4$.

调和点列与线束

撸题侠压轴课 > 培优

(2022 年高考全国乙卷数学（理）· 第 20 题）已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$两点.

(1)求 E 的方程； $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

(2)设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overline{MT}=\overline{TH}$. 证明：直线 HN 过定点.

$P(1,-2) \rightarrow \frac{y\cdot(-2)}{4}+\frac{1\cdot x}{3}=1 \quad -6y+4x-12=0\ (l_{极})$

$2x-3y-6=0\ (l_{AB})$

(P,M,Q,N) 成调和点列

↓

(AP,AM,AQ,AN) 调和线束

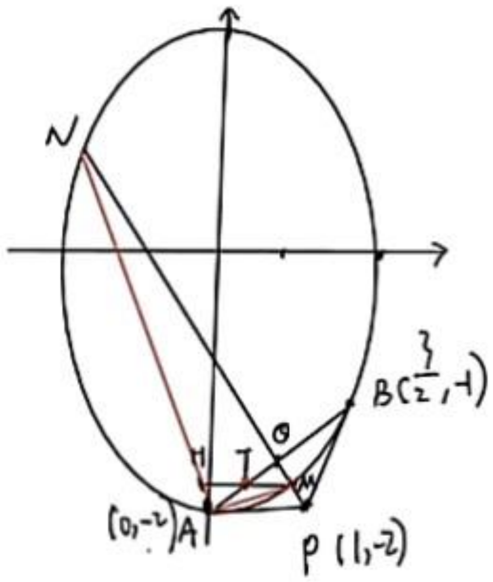
$HM \parallel AP \Leftrightarrow H'T=TM$

$MT=TH$

$H'T=TH$

H', H 重合

$\Rightarrow N, H, A$ 三点共线



新高考新方向

由以上例题和解析可知，了解极点极线这一高等数学背景，是可以居高临下，看穿题目的，只是需要老师跟学生强调，考试过程中还是要用通性通法写过程，在已经知道答案的基础上去写过程思路会明朗很多。除此之外，笔者在经过教学实践之后，也有所反思，极点极线的性质何其多，又哪止这些，但适不适合教给学生，还得"因材施教"，若是基础一般的学生，还是老实掌握通法为妙，不可好高骛远。但作为老师还是要见多识广，教学时才可以游刃有余。最后以单墫教授的一句话结尾："解题研究无禁区，解题教学有禁忌。"

不当之处，敬请指正！

谢谢大家！