高考三次函数纵横谈

刘连红

近些年高考不断出现三次函数的题（列举如下），因此我们还需要继续深入研究和探讨有关三次函数的问题和方法。

1. （2022 新高考 1）已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$ 有两个极值点　　　　B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　　　D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

2．(2021 年乙卷文 12 理 10) 设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^2\left(x-b\right)$ 的极大值点，则(　)

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

3．（2013•新课标II）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是（　　）

A．$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$

B．函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

C．若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间（$-\infty$，x_0）上单调递减

D．若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

4．(2018 年江苏卷第 11 题) 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为_______________.

5.（2022 全国甲（文）T20）　已知函数 $f(x)=x^3-x,g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

（1）若 $x_1=-1$，求 a；

（2）求 a 的取值范围.

6．(2021 年全国乙卷文 21) 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

(1) 讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2) 求曲线 $y=f\left(x\right)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f\left(x\right)$ 的公共点的坐标.

7．(2020 年课标Ⅲ卷文 20) 已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点，求 k　取值范围.

8．(2019 年全国III理 20) 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由.

9．(2019 年江苏 19) 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c), a,b,c\in \mathrm{R}$、$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

(2) 若 $a\neq b, b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值；

(3) 若 $a=0, 0<b\leqslant 1, c=1$，且 $f(x)$ 的极大值为 M，求证: $M\leqslant \dfrac{4}{27}$.

10．(2019 年北京理 19 文 20) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.

(Ⅰ) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

(Ⅱ) 当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leq f(x)\leq x$；

(III) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$，当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值.

11．(2018 年天津文 20) (14 分)

设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$，其中 $t_1,t_2,t_3\in\mathbf{R}$,且 t_1,t_2,t_3 是公差为 d 的等差数列.

(1) 若 $t_2=0, d=1,$ 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $d=3$，求 $f(x)$ 的极值；

(3) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点，求 d 的取值范围.

12．(2018 年课标Ⅱ卷文 21) (12 分) 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-a\left(x^2+x+1\right)$.

(1) 若 $a=3$，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：$f(x)$ 只有一个零点.

有关三次函数的考察，不外乎极值（最值）、零点、单调性、切线、含参数问题，下面以一个简单的三次函数为例，来考察学生的几个相关知识点。

【题目】 已知$f(x)=x^3-3x^2+1$，则下列结论正确的是（　　）

A. 记 A(0，$f(0)$)，B(2，$f(2)$)，则$k_{AB}=\frac{2}{3}f'(1)$

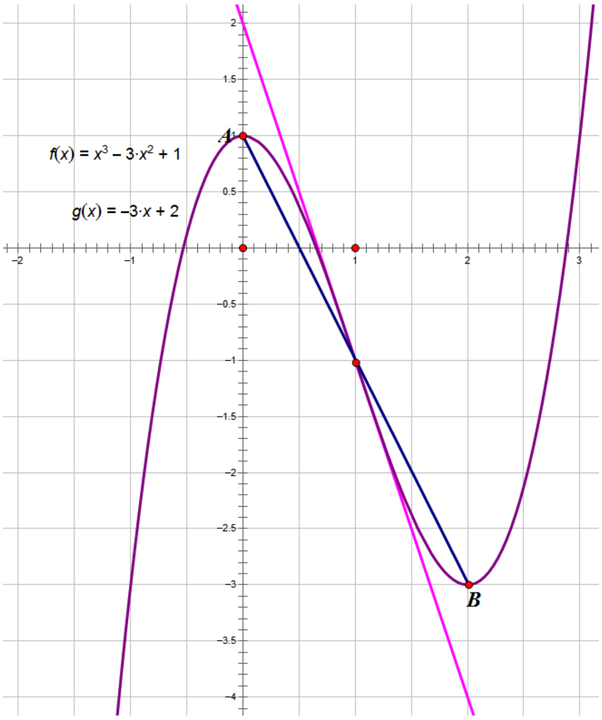
B. 将$y=f(x)$的图像向下平移m个单位后与x轴有一个交点，则$m\in(1，+\infty)$

C. $y=f(x)$在$\left[-\frac{3}{2}，3\right]$上的最小值为$f(2)=-3$

D. 过(3，0)作$y=f(x)$的切线有 3 条

选项 A 考察的是一个三次函数固有的结论（如图），计算不算麻烦，但是记住的话可以秒杀。

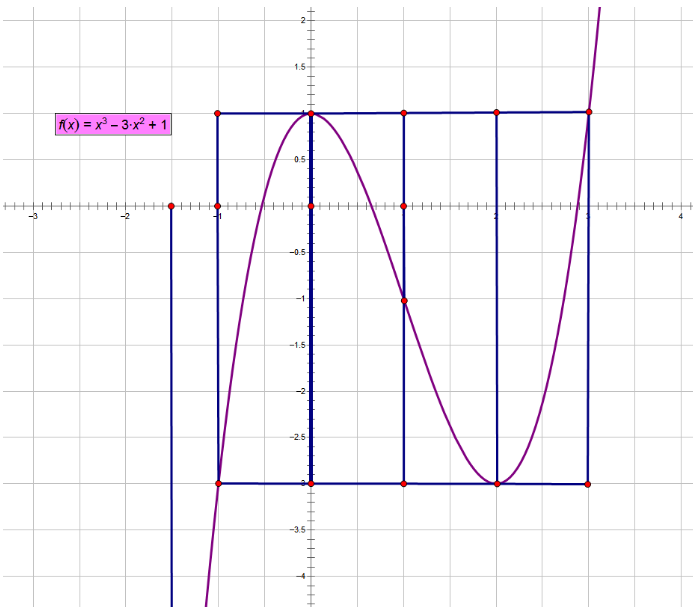
A.



选项 B 没问题，只要能作出示意图，答案立即得到。

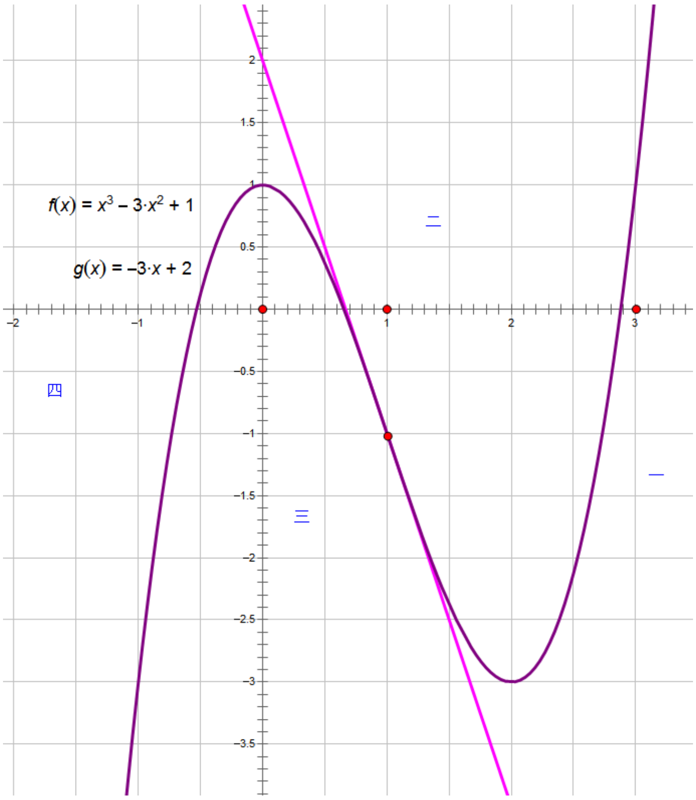
选项 C 也不用计算，知道三次函数的特征，准确作图（如图），立即可以判断。

C.



选项 D 也不用计算，过每个区域内的点做几条切线，都是确定的（如图）。

D.



三次函数还有更多可以挖掘的便于考察的点，这里只是抛砖引玉，请大家继续深入研究。