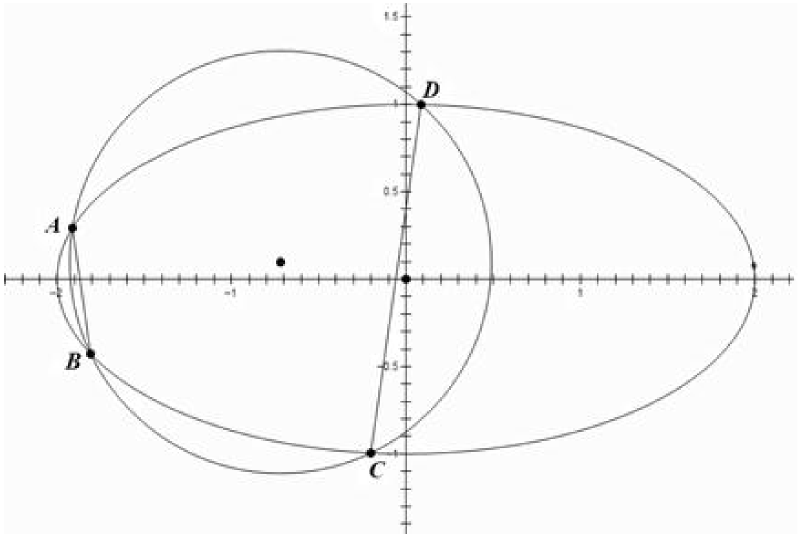
**三、圆锥曲线中四点共圆的优美性质**

在一般情况下，二次曲线的联立因为计算量大、较不直观且不常出现而被忽略，但是当圆锥曲线于圆相交的时候，会出现一些斜率的关系。

**定理 1（椭圆上四点共圆的充要条件）椭圆**$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **上四点** $A,B,C,D$ **共圆的充要条件是** $k_{AB}+k_{CD}=0$ **.**

若两条直线与二次曲线$ax^2+by^2+cx+dy+c=0(a\neq b)$有四个交点，则这四个交点共圆的充要条件时这两条直线的倾斜角互补。懂得这个结论后，我们就可以利用这一充要条件来“秒杀”圆锥曲线上四点共圆的数学问题。



**证明这个结论需要用到平面几何中的切割线(相交弦)定理：直线 $AB$ 与直线 $CD$ 交于点 $P$，则 $A,B,C,D$ 四点共圆的充要条件是 $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$.**

**思路 1：考虑过定点 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的割线 $PAB$ 与 $PCD$，设直线 $AB$ 与直线 $CD$ 的倾斜角分别为 $\alpha,\beta\ (\alpha\neq\beta)$，直线 $AB$：**$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\beta\end{cases}$.

**直线 $AB$ 与 $\Gamma: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 联立得：**

$$(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)t^2+(2b^2x_0\cos\alpha+2a^2y_0\sin\alpha)t+(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)=0$$

**故** $|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=\dfrac{|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2|}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$，

**用 $\beta$ 代替 $\alpha$ 得：** $|PC|\cdot|PD|=\dfrac{|b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2|}{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}$

**则 $A,B,C,D$ 四点共圆** $\Leftrightarrow |PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|\Leftrightarrow$

$a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha=a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=\pi$，**即** $k_{AB}+k_{CD}=0$.

**思路 2：** 设直线 $AB: y=k_1x+b_1$，$CD: y=k_2x+b_2$，则 $(k_1x-y+b_1)(k_2x-y+b_2)=0$ 表示直线 $AB$ 与 $CD$ 上所有的点.

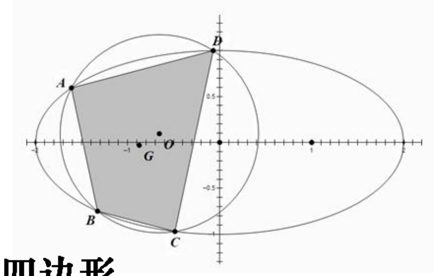
考虑其与 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 构成的焦点曲线系：$(k_1x-y+b_1)(k_2x-y+b_2)+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1)=0$，

观察得到 $xy$ 项的系数为 $-(k_1+k_2)$.

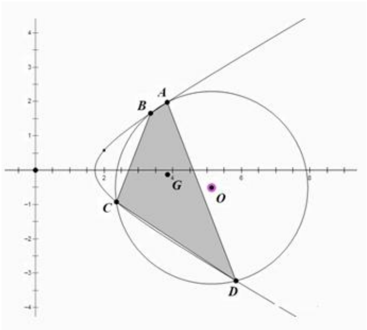
当其表示圆时，必定无 $xy$ 项，故 $k_1+k_2=0$；另一方面，当其无 $xy$ 项时，可以让 $x^2$ 项的系数与 $y^2$ 项的系数相等，从而使其表示圆。至此，充要性得证。

**推论：** 事实上，对于任意圆锥曲线，曲线上四点共圆的充要条件是其中两点连线的斜率与另外两点连线的斜率互为相反数，证明过程同上。

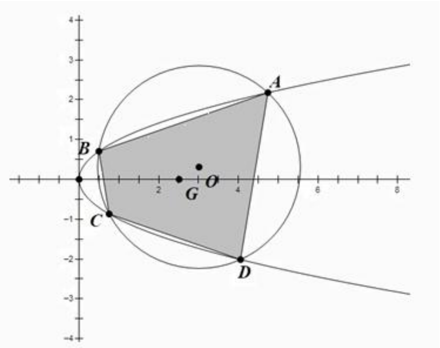
**定理 2、椭圆**$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$**与以**$O(x_0,y_0)$**为圆心的圆交于**$A,B,C,D$**四点，记四边形**$ABCD$**的重心为**$G$**，则**$G(\dfrac{1}{e^2}x_0,(1-\dfrac{1}{e^2})y_0)$**.（此处重心指代的是横纵坐标分别为四点横纵坐标的算术平均值的点，即**$x_G=\dfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$**，**$y_G=\dfrac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$**）.**




**定理 3、双曲线**$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$**与以**$O(x_0,y_0)$**为圆心的圆交于**$A,B,C,D$**四点，记四边形**$ABCD$**的重心为**$G$**，则**$G(\dfrac{1}{e^2}x_0,(1-\dfrac{1}{e^2})y_0)$**.**




**定理 4、 抛物线**$C:y^2=2px$**与以**$O(x_0,y_0)$**为圆心的圆交于**$A,B,C,D$**四点，记四边形**$ABCD$**的重心为**$G$**，则**$G(x_0-p,0)$**.**



# 高考题二：

**题源** (2011 大纲卷文压轴、理)已知 $O$ 为坐标原点，$F$ 为椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 $y$ 轴正半轴上的焦点，过 $F$ 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A$、$B$ 两点，点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=0$.

(1) 证明：点 $P$ 在 $C$ 上；(2) 设点 $P$ 关于点 $O$ 的对称点为 $Q$，证明：$A$、$P$、$B$、$Q$ 四点在同一圆上.

解法一：

(II)由 $P(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$ 和题设知，$Q(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$，$PQ$ 的垂直平分线 $l_1$ 的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad ①$$

设 $AB$ 的中点为 $M$，则 $M(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2})$，$AB$ 的垂直平分线 $l_2$ 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}. \quad ②$$

由①、②得 $l_1$、$l_2$ 的交点为 $N(-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8})$. ............................9 分

$$|NP|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8})^2+(-1-\frac{1}{8})^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8},$$

$$|AB|=\sqrt{1+(-\sqrt{2})^2}\cdot|x_2-x_1|=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$|AM|=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$|MN|=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8})^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

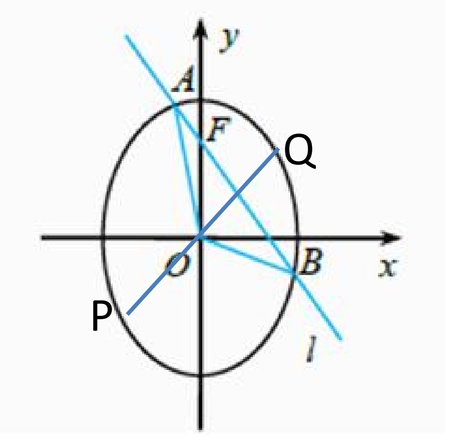
$$|NA|=\sqrt{|AM|^2+|MN|^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8},$$

故 $|NP|=|NA|$,

又 $|NP|=|NQ|$, $|NA|=|NB|$,

所以 $|NA|=|NP|=|NB|=|NQ|$,

由此知 $A$、$P$、$B$、$Q$ 四点在以 $N$ 为圆心, $NA$ 为半径的圆上. ...............12 分



## 高考题二：

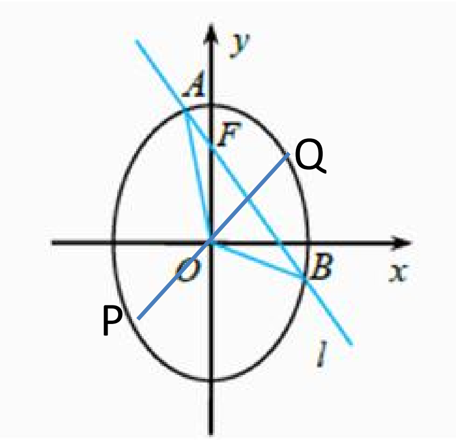
**题源** (2011 大纲卷文压轴、理)已知 $O$ 为坐标原点，$F$ 为椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 $y$ 轴正半轴上的焦点，过 $F$ 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A$、$B$ 两点，点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=0$ .

(1) 证明：点 $P$ 在 $C$ 上；(2) 设点 $P$ 关于点 $O$ 的对称点为 $Q$，证明：$A$、$P$、$B$、$Q$ 四点在同一圆上.

解法二：

$$\tan\angle APB=\frac{k_{PA}-k_{PB}}{1+k_{PA}k_{PB}}=\frac{\dfrac{y_1-(-1)}{x_1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}-\dfrac{y_2-(-1)}{x_2-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}}{1+\dfrac{y_1-(-1)}{x_1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}\cdot\dfrac{y_2-(-1)}{x_2-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}}$$

$$=\frac{3(x_2-x_1)}{3x_1x_2-\frac{3\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)+\frac{9}{2}}=\frac{4(x_2-x_1)}{3}$$




$$\tan\angle AQB=\frac{k_{QB}-k_{QA}}{1+k_{QA}k_{QB}}=\frac{\dfrac{y_2-1}{x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\dfrac{y_1-1}{x_1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}}{1+\dfrac{y_2-1}{x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{y_1-1}{x_1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}}$$

同理，

$$=\frac{(x_1-x_2)}{3x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}}=-\frac{4(x_2-x_1)}{3}$$

所以 $\angle APB,\angle AQB$ 互补，因此 A、P、B、Q 四点在同一圆上。