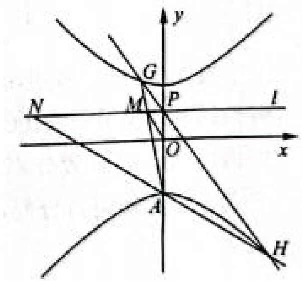
二、周测6济南一模21题

在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，实轴长为 4.

(1)求 C 的方程；

(2)如图，点 A 为双曲线的下顶点，直线 l 过点 $P(0,t)$ 且垂直于 y 轴（P 位于原点与上顶点之间），过 P 的直线交 C 于 G,H 两点，直线 AG,AH 分别与 l 交于 M,N 两点，若 O,A,N,M 四点共圆，求点 P 的坐标.



21.【解析】

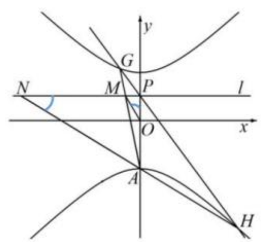
（1）因为 实轴长为 4，即 $2a=4$，$a=2$，又 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，所以 $c=2\sqrt{2}$，$b^2=c^2-a^2=4$，

故 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$.

（2）由 O,A,N,M 四点共圆可知，$\angle ANM+\angle AOM=\pi$，

又 $\angle MOP+\angle AOM=\pi$，即 $\angle ANM=\angle MOP$，

故 $\tan\angle ANM=\tan\angle MOP=\dfrac{1}{\tan\angle OMP}$，



即 $-k_{AN}=\dfrac{1}{-k_{OM}}$，所以 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$.

设 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，

由题意可知 $A(0,-2)$，则 直线 AG：$y=\dfrac{y_1+2}{x_1}x-2$，直线 AH：$y=\dfrac{y_2+2}{x_2}x-2$

因为 M 在直线 l 上，所以 $y_M=t$，代入直线 AG 方程，可知 $x_M=\dfrac{(t+2)x_1}{y_1+2}$，

故 M 坐标为 $\left(\dfrac{(t+2)x_1}{y_1+2},t\right)$，所以 $k_{OM}=\dfrac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}$，

又 $k_{AN}=k_{AH}=\dfrac{y_2+2}{x_2}$，由 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，则 $\dfrac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}\cdot\dfrac{y_2+2}{x_2}=1$，

整理可得 $\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}$，

当直线 GH 斜率不存在时，显然不符合题意，

故设直线 GH：$y=kx+t$，代入双曲线方程：$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$ 中，

可得 $(k^2-1)x^2+2ktx+t^2-4=0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{-2kt}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{t^2-4}{k^2-1}$，

又 $(y_1+2)(y_2+2)=(kx_1+t+2)(kx_2+t+2)$

$$=k^2x_1x_2+k(t+2)(x_1+x_2)+(t+2)^2=k^2\cdot\frac{t^2-4}{k^2-1}+k(t+2)\cdot\frac{-2kt}{k^2-1}+(t+2)^2=\frac{-(t+2)^2}{k^2-1}$$

所以 $\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}=\dfrac{\dfrac{-(t+2)^2}{k^2-1}}{\dfrac{t^2-4}{k^2-1}}=\dfrac{-(t+2)^2}{t^2-4}=\dfrac{-(t+2)}{t-2}$ $(t+2\neq 0)$，

故 $t=2-t$，即 $t=1$，所以 点 P 坐标为 $(0,1)$.

高考题一：

（2021年新高考 I 卷）在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{17},0\right)$,$|MF_1|-|MF_2|=2$,点 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程;

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上,过 T 的两条直线分别交 C 于 A、B 两点和 P,Q 两点,且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

国标答案:

（1）由题设，可得 C 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右支，且 $2a=2$，$a^2+b^2=17$，解得 $a=1,b=4$，所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1\left(x\geq 1\right)$.

国标答案：（2）由题意，可设 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为

$y-t=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$，将直线方程代入 C 的方程，可得

$$\left(k^2-16\right)x^2+\left(2kt-k^2\right)x+\frac{x^2}{4}-kt+t^2+16=0，$$

故 $x_1+x_2=\frac{k^2-2kt}{k^2-16}$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2-4kt+4t^2+64}{4k^2-64}$.

则 $|TA|\cdot|TB|=\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+(y_1-t)(y_2-t)=\left(1+k^2\right)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\left(k^2+1\right)\left(t^2+12\right)}{k^2-16}$$

设直线 PQ 的斜率为 $m(m\neq k)$，同理可得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{\left(m^2+1\right)\left(t^2+12\right)}{m^2-16}$.

由题设的 $\frac{\left(k^2+1\right)\left(t^2+12\right)}{k^2-16}=\frac{\left(m^2+1\right)\left(t^2+12\right)}{m^2-16}$，故 $k^2=m^2$，所以 $k=-m$，即 $m+k=0$.

故直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0 .

方法二： 设$T\left(\frac{1}{2},n\right)$，设$AB$： $y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

联立$\begin{cases} y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ x^2-\frac{y^2}{16}=1 \end{cases}$， $\therefore\left(16-k_1^{\ 2}\right)x^2+\left(k_1^{\ 2}-2k_1n\right)x-\frac{1}{4}k_1^{\ 2}-n^2+k_1n-16=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{k_1^{\ 2}-2k_1n}{k_1^{\ 2}-16}$， $x_1+x_2=\frac{\frac{1}{4}k_1^{\ 2}+n^2-k_1n+16}{k_1^{\ 2}-16}$，

$|TA|=\sqrt{1+k_1^{\ 2}}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$，

$|TB|=\sqrt{1+k_1^{\ 2}}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore|TA|\cdot|TB|=\left(1+k_1^{\ 2}\right)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(n^2+12\right)\left(1+k_1^{\ 2}\right)}{k_1^{\ 2}-16}$，

设PQ： $y-n=k_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，同理$|TP|\cdot|TQ|=\frac{\left(n^2+12\right)\left(1+k_2^{\ 2}\right)}{k_2^{\ 2}-16}$，

$\because|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，

$\therefore\frac{1+k_1^{\ 2}}{k_1^{\ 2}-16}=\frac{1+k_2^{\ 2}}{k_2^{\ 2}-16}$， $1+\frac{17}{k_1^{\ 2}-16}=1+\frac{17}{k_2^{\ 2}-16}$，

$\therefore k_1^{\ 2}-16=k_2^{\ 2}-16$，即$k_1^{\ 2}=k_2^{\ 2}$， $\because k_1\neq k_2$，

$\therefore k_1+k_2=0$.

思路1、常规思路，利用圆锥曲线设而不求的思想

解法1：国标---利用共线，将长度问题转化为向量的数量积问题

$$|TA|\cdot|TB|=\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+(y_1-t)(y_2-t)=\left(1+k^2\right)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(k^2+1\right)\left(t^2+12\right)}{k^2-16}$$

解法2：利用两点间的距离公式表示线段长度

$|TA|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-\frac{1}{2}|=\sqrt{1+k^2}(x_1-\frac{1}{2})$，$|TB|=\sqrt{1+k^2}(x_2-\frac{1}{2})$

思路1、常规思路，利用圆锥曲线设而不求的思想

解法 3：整体代入：简化运算，对双曲线方程巧妙变形，再联立方程组

方程：$x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$可化为：$16[(x-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2}]^2-y^2-16=0$，

将直线方程代入C的方程，可得：

$$(16-k^2)(x-\frac{1}{2})^2+(16-2kt)(x-\frac{1}{2})-t^2-12=0$$

$$\therefore (x_1-\frac{1}{2})+(x_1-\frac{1}{2})=-\frac{16-2kt}{16-k^2}=\frac{2kt-16}{k^2-16}$$

$$(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_1-\frac{1}{2})=\frac{-t^2-12}{16-k^2}=\frac{t^2+12}{k^2-16}$$

思路1、常规思路，利用圆锥曲线设而不求的思想

解法 4：平移变换，简化运算

令$\begin{cases} x = x' + \dfrac{1}{2} \\ y = y' + t \end{cases}$，**则双曲线方程为**$16(x' + \dfrac{1}{2})^2 - (y' + t)^2 = 16, (x' + \dfrac{1}{2} > 0)$

直线 AB **方程为：** $y' = kx'$

联立得： $(16 - k_1^2)x'^2 + (16 - 2k_1 t)x' - (t^2 + 12) = 0$

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{t^2 + 12}{k^2 - 16}$$

思路1、常规思路，利用圆锥曲线设而不求的思想

解法 5：利用二次函数零点表达式，简化运算

$$16x^2-[k(x-\frac{1}{2})+t]^2-16=(16-k^2)(x-x_1)(x-x_2)$$

令 $x=\frac{1}{2}$

$$(\frac{1}{2}-x_1)(\frac{1}{2}-x_2)=\frac{4-t^2}{16-k^2}$$

所以 $(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})=\frac{4-t^2}{16-k^2}$

$$|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})=(1+k_1^2)\ [x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}]=\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16}-\frac{1}{2}(\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16})+\frac{1}{4}=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$$

解法中利用韦达定理代进去计算|TA|·|TB|比较繁琐，那我们能否“另辟蹊径”，能否找到更为“简捷”的计算方法？由于这里直接代进去，利用韦达定理增加了计算量。注意到 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})$ 的结构，如果要避免直接用韦达定理，我们可考虑利用双根赋值法。

在解析几何中，若直线与曲线相交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，遇到求 $(x_1-x_2)^2$ 或 $(x_1+t)(x_2+t)$ 的值，传统的方法是展开整理后再利用韦达定理求解，但该法迂回曲折，计算量大，可利用恒等式，整体代入，避开韦达定理，直接求解.

即：若 x_1，x_2，是一元二次方程 $f(x)=Ax^2+Bx+C=0(A\neq 0)$ 的两个根，则：

① $x_1\cdot x_2=\frac{1}{A}f(0)$；② $(x_1-x_2)^2=\frac{B^2-4AC}{A^2}$；③ $(x_1+t)(x_2+t)=\frac{1}{A}f(-t)$

思路2：特殊情况探路，一般情况验证

设T为$(\frac{1}{2},0)$，由题设，直线AB,PQ关于x轴对称，所以，直线AB的斜率与直线PQ的斜率之和为0.

下面同以上思路1．

设T为$(\frac{1}{2},0)$，由题设，直线AB,PQ关于x轴对称，所以，直线AB的斜率与直线PQ的斜率之和为0.

设直线AB,PQ的斜率为k,m $(m\neq k)$，当$k+m=0$

同上韦达定理

$$|TA||TB|=\left(1+k^2\right)\cdot(\frac{t^2+12}{k^2-16})$$

$$|TP|\cdot|TQ|=\left(1+m^2\right)\cdot(\frac{t^2+12}{m^2-16})=\left(1+(-k)^2\right)\cdot(\frac{t^2+12}{(-k)^2-16})=\left(1+k^2\right)\cdot(\frac{t^2+12}{k^2-16})=|TA||TB|$$

此方法中$|TA|\cdot|TB|$和$|TP|\cdot|TQ|$的表达式只要出现其中任何一个，就得分。

思路3：利用参数方程解决长度问题

设T**为**$(\frac{1}{2},m)$**，直线**$AB:\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\theta_1\\ y=m+t\sin\theta_1\end{cases}$**，直线**$PQ:\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\theta_2\\ y=m+t\sin\theta_2\end{cases}$**，其中**$\theta_1\neq\theta_2$.

代入轨迹C**方程中可得：**

$16(\frac{1}{4}+t^2\cos^2\theta_1+t\cos\theta_1)-(m^2+t^2\sin^2\theta_1+2mt\sin\theta_1)-16=0$

整理得$(16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1)t^2+(16\cos\theta_1-2m\sin\theta_1)t-(m^2+12)=0$

则$t_1t_2=-\dfrac{m^2+12}{16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1}$

$|TA|\cdot|TB|=|t_1|\cdot|t_2|=t_1t_2=-\dfrac{m^2+12}{16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1}=\dfrac{m^2+12}{\sin^2\theta_1-16\cos^2\theta_1}=\dfrac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_1}$.

同理$|TP|\cdot|TQ|=\dfrac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_2}$.

由题设得：$\dfrac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_1}=\dfrac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_2}$**，所以**$\cos^2\theta_1=\cos^2\theta_2$

$\because\theta_1\neq\theta_2$**，于是**$\theta_1+\theta_2=\pi$

故直线AB**的斜率与直线**PQ**的斜率之和为0.**

思路4：利用曲线系方程

由$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$可以得出$A,B,P,Q$四点共圆（可利用三角形相似证明）

可设T为$(\frac{1}{2},t)$，直线AB的方程为$y-t=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$，直线$PQ$的方程为$y-t=m\left(x-\frac{1}{2}\right)$,所

以由A,B,P,Q组成的二次曲线系方程为：

$$(kx-y+t-\frac{k}{2})(mx-y+t-\frac{m}{2})+\lambda(x^2-\frac{y^2}{16}-1)=0$$

上式表示圆，则x^2,y^2系数相等，且无x,y项（要满足圆的条件）

$\therefore\begin{cases}km+\lambda=1\\-k-m=0\end{cases}$，$\therefore k+m=0$

所以直线AB的斜率与直线PQ的斜率之和为 0 .

思路5：利用二级结论

二级结论1:

设 A,B,P,Q 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 上四点，AB,PQ 所在直线的倾斜角分别为 α,β，AB,PQ 相交于 T，且 T 不在双曲线上，则：

$$\frac{|TA|\cdot|TB|}{|TP|\cdot|TQ|}=\frac{b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}$$

所以 $\frac{|TA|\cdot|TB|}{|TP|\cdot|TQ|}=\frac{16\cos^2\beta-\sin^2\beta}{16\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=1$

所以 $\cos^2\alpha=\cos^2\beta$

因为 $\alpha\neq\beta$，从而 $\cos\alpha=-\cos\beta$，$\alpha+\beta=\pi$，$\tan\alpha=-\tan\beta$

故直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0 .

思路5：利用二级结论

二级结论2:

由$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$可以得出$A,B,P,Q$四点共圆（可利用三角形相似证明）

已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$上不同四点$A,B,P,Q$，若直线$AB$与直线$PQ$有公共点

则A,B,P,Q四点共圆的充要条件为直线AB与直线PQ的斜率之和为 0 .