从最近两道模拟考试题谈起……

2019级高三数学组　苏清军

一、期中考试21题

21．已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、右顶点分别为$A$，$B$，$F$是椭圆$\Gamma$的右焦点，$P(\sqrt{2},1)$是椭圆$\Gamma$上的点，且$|OA|=|OF|$（$O$是坐标原点）．

(1)求a，b的值；

(2)若不过点P且斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的直线l交椭圆Γ于M，N两点，试问：当点P在直线l的上方时，$\triangle PMN$的内心是否位于某条定直线上？若是，请求该定直线的方程；若不是，请说明理由．

(3) 若不过点P且斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的直线l交椭圆Γ于M，N两点，当点P在直线l的下方时，$\triangle PMN$的内心是否位于某条定直线上？若是，给出该定直线的方程即可，不需要说明理由．（这一问2分）

解法一：

21．解：(1)设点$F(c,0),(c>0)$，因为$|OA|=|OF|$，所以$b=c$，所以$a^2=b^2+c^2=2b^2$，

又$P(\sqrt{2},1)$是椭圆Γ上的点，所以$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$即$\frac{2}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，所以$b^2=2$，$a^2=4$，所以$a=2$，$b=\sqrt{2}$．

(2)由题意设直线$l:y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m(m\neq0)$，即$x=\sqrt{2}y-\sqrt{2}m(m\neq0)$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由（I）得椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

则$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ x=\sqrt{2}y-\sqrt{2}m\end{cases}$，消去$x$得$4y^2-4my+2m^2-4=0$，

由$\Delta=(-4m)^2-4\times4(2m^2-4)>0$可得$-2<m<2$，　则$y_1+y_2=m$，$y_1y_2=\frac{m^2-2}{2}$，

因为$k_{MP}=\frac{1-y_1}{\sqrt{2}-x_1}$，$k_{NP}=\frac{1-y_2}{\sqrt{2}-x_2}$，

所以$k_{MP}+k_{NP}=\frac{1-y_1}{\sqrt{2}-x_1}+\frac{1-y_2}{\sqrt{2}-x_2}=\frac{(1-y_1)(\sqrt{2}-x_2)+(1-y_2)(\sqrt{2}-x_1)}{(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)}$

$$=\frac{(1-y_1)(\sqrt{2}-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}m)+(1-y_2)(\sqrt{2}-\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}m)}{(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}m)(1-y_1+1-y_2)-\sqrt{2}(y_1+y_2)+2\sqrt{2}y_1y_2}{(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}m)(2-m)-\sqrt{2}m+2\sqrt{2}\times\frac{m^2-2}{2}}{(\sqrt{2}-x_1)(\sqrt{2}-x_2)}=0;$$

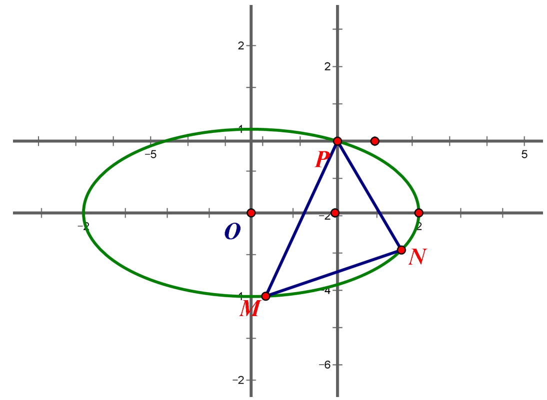
所以当点P在直线l的上方时，$\angle MPN$的平分线为直线$x=\sqrt{2}$，所以此时内心位于定直线$x=\sqrt{2}$上；

(3)当点P在直线l的下方时，$\angle MPN$的平分线为直线$y=1$，所以此时内心位于定直线$y=1$上．

解法二：平移坐标系齐次化

解：平移坐标系 $\begin{cases}x=x'+\sqrt{2}\\ y=y'+1\end{cases}$，使得点 P 为原点 O′，设点 M、N 对应的点 M′、N′，且直线

M′N′的方程为 $mx'+ny'=1$，



则椭圆方程变为 $\frac{\left(x'+\sqrt{2}\right)^2}{4}+\frac{(y'+1)^2}{2}=1$ 展开得 $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{2}+\frac{\sqrt{2}x'}{2}+y'=0$

化为齐次式 $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}x'}{2}+y'\right)(mx'+ny')=0$

$$\frac{2\sqrt{2}m+1}{4}x'^2+\frac{2n+1}{2}y'^2+\left(\frac{\sqrt{2}n}{2}+m\right)x'y'=0$$

两边同除以 x'^2 得 $\frac{2n+1}{2}\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}n}{2}+m\right)\left(\frac{y'}{x'}\right)+\frac{2\sqrt{2}m+1}{4}=0$

又 $k_{MN}=k_{M'N'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore -\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}n}{2}+m=0$

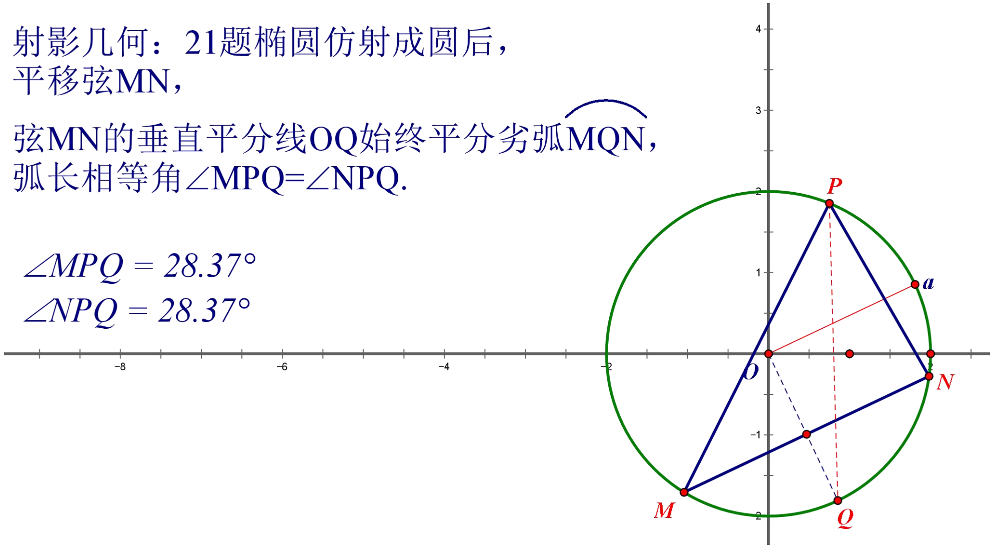
$\therefore k_{O'M'}+k_{O'N'}=\frac{y'_1}{x'_1}+\frac{y'_2}{x'_2}=0$ $\qquad\therefore k_{PM}+k_{PN}=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}=0$

解法三：仿射变换

射影几何：21题椭圆仿射成圆后，
平移弦MN，

弦MN的垂直平分线OQ始终平分劣弧$\overset{\frown}{MQN}$，
弧长相等角∠MPQ=∠NPQ.

$\angle MPQ = 28.37°$
$\angle NPQ = 28.37°$



解：椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$上点$(x,y)$变换成$(x',y')$满足$\begin{cases}x=x'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$，

点$P(\sqrt{2},1)$对应的点$P'(\sqrt{2},\sqrt{2})$在圆$x'^2+y'^2=4$上，

直线MN斜率$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y'}{x'}$，$\therefore\frac{y'}{x'}=1$，

弦MN的垂直平分弦方程始终是$y'=-x'$

联立$\begin{cases}x'^2+y'^2=4\\ y'=-x'\end{cases}$，得$x'=\pm\sqrt{2}$，

$\therefore$劣弧中点$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，优弧中点$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

知识拓展：利用平移坐标系构造齐次式来证明

已知 $P(x_0, y_0)$ 是平面内一定点，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有两动点 A,B

（1） 若直线 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点。

（2） 若直线 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点。

第一步：平移坐标系

将椭圆 C 按向量 $\overrightarrow{PO}=(-x_0,-y_0)$ 方向平移，得到椭圆 C'：$\dfrac{(x+x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$，展开

得：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{2x_0}{a^2}x+\dfrac{2y_0}{b^2}y+\dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}-1=0$。

平面内的定点 $P(x_0,y_0)$ 和椭圆 C 上的动点 A,B 分别对应椭圆 C' 上的定点 O 和动点 A',B'，设直线 $A'B'$ 的方程为 $mx+ny=1$，代入展开式得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+(\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y)\cdot(mx+ny)+(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-1)\cdot(mx+ny)^2=0.$$

第二步：构造齐次式

当 $x\neq0$ 时，两边同时除以 x^2 整理得：

$[\dfrac{n^2x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2]\dfrac{y^2}{x^2}+(\dfrac{2mnx_0{}^2+2x_0n}{a^2}+\dfrac{2mny_0^2+2y_0m}{b^2}-2mn)\dfrac{y}{x}+[\dfrac{(mx_0+1)^2}{a^2}+\dfrac{m^2y_0{}^2}{b^2}-m^2]=0$，因为点 A',B' 的坐标满足这个方程，所以 $k_{OA'}$ 和 $k_{OB'}$ 是关于 $\dfrac{y}{x}$ 的方程的两根。

第三步：m与n的关系

结论 1：若$k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，由平移性质知$k_{OA'}+k_{OB'}=\lambda$，所以$k_{OA'}+k_{OB'}=-\dfrac{\dfrac{2mnx_0^2+2x_0n}{a^2}+\dfrac{2mny_0^2+2y_0m}{b^2}-2mn}{\dfrac{n^2x_0^2}{a^2}+\dfrac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2}=\lambda$，整理可得到$m$和$n$的关系，从而可知直线$A'B'$过定点，由平移性质可得直线$AB$过定点。

结论 2：若$k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，由平移性质知$k_{OA'}\cdot k_{OB'}=\lambda$，所以$k_{OA'}\cdot k_{OB'}=\dfrac{\dfrac{(mx_0+1)^2}{a^2}+\dfrac{m^2y_0^2}{b^2}-m^2}{\dfrac{n^2x_0^2}{a^2}+\dfrac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2}=\lambda$，整理可得到$m$和$n$的关系，从而可知直线$A'B'$过定点，由平移性质可得直线$AB$过定点。

其他结论：

已知点P是椭圆上一个定点，椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上有两动点$A$、$B$

（1）若直线$k_{PA}+k_{PB}=\lambda(\lambda\neq 0)$，则直线$AB$过定点$(x_0-\dfrac{2y_0}{\lambda},-y_0-\dfrac{2x_0b^2}{\lambda a^2})$；

（2）若直线$k_{PA}+k_{PB}=0$，则直线AB斜率为定值$\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2}$；

（3）若直线$k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda(\lambda\neq\dfrac{b^2}{a^2})$，则直线$AB$过定点$\left(\dfrac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\dfrac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$；

（4）若直线$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}$，则直线$AB$斜率为定值$-\dfrac{y_0}{x_0}$；

（5）当直线 AB 过定点为原点时，则有$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$（直接用点差法证明）；