无所不在的定比点差（一）

一、 定比分点的概念

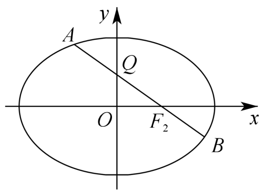
定比分点： $M(x,y)$ 为经过两个不同的定点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的直线上的一点，且满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，则：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$（$\lambda$ 为参数，$\lambda\neq -1$）．

题型一 圆锥曲线上的点作为定比分点的 $\lambda+\mu$ 为定值问题

【例 1】（2021•合肥模拟）已知 $P(1,\dfrac{3}{2})$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点，F_1，F_2 分别是椭圆 C 的左、右焦点，且 $|PF_1|=\dfrac{5}{2}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程．

（2）过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，与椭圆 C 的短轴交于点 Q，若 $\dfrac{|AQ|}{|AF_2|}=\lambda$，$\dfrac{|BQ|}{|BF_2|}=\mu$，试问 $\lambda+\mu$ 是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由．



【训练 2】（2021•吉安期末）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

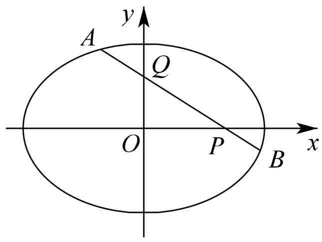
（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）直线 l 与 x 轴正半轴和 y 轴分别交于点 Q，P，与椭圆分别交于点 M，N，各点均不重合且满足 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NQ}$．若 $\lambda+\mu=-4$，证明：直线 l 恒过定点．

模型总结：

模型一 如下图所示，若 A，B 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上的两点，直线 AB 与 x 轴交于点 P，与 y 轴交于点 Q，且 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{BP}$.

①P 为左（右）焦点；　　②$\lambda+\mu=-\frac{2a^2}{b^2}$. 则①②互为充要条件.



模型二 在抛物线 $y^2=2px$ 中，A，B 为抛物线上两点，P，Q 分别在 x 轴，y 轴上，$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{BP}$.

①P 为焦点；　　②$\lambda+\mu=-1$. 则①②互为充要条件

模型三 双曲线一定有：①P 为焦点；　②$\lambda+\mu=\frac{2a^2}{b^2}$.

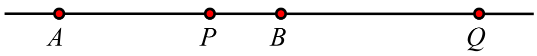
综合拓展：①$\lambda+\mu=t$ （t 为定值）；　②P 为 x 轴一定点 $(m,0)$. 则两者互为充要条件：$\frac{m^2t}{a^2}=2+t$.

二、 调和点列的引入

1．调和点列的概念

如下图①，点 P 在线段 AB 上，则满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\lambda$ $(\lambda>0)$ 的点 P 是唯一存在的．但是，如果将线段 AB 改为直线 AB，此时，满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\lambda$ 的点有两个，如下图②，不妨记另一个点为 Q，则 $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}=\lambda$ $(\lambda\neq1)$，在此种情况下，我们称点 A、P、B、Q 为**调和点列**，或者称点 P、Q **调和分割**点 A、B．

图①

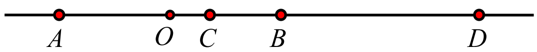


图②

特别的，当 $\lambda=1$ 时，即点 P 为 AB 的中点，则 Q 为无穷远点．

2．调和点列的性质

如下图所示：对于线段 AB 的内分点 C 和外分点 D 满足 C、D 调和分割线段 AB，即 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$，设 O 为线段 AB 的中点，则有以下结论成立：



①点 A、B 也调和分割 C、D，即 $\frac{CA}{AD}=\frac{CB}{BD}$；

② $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$（$AB$ 是 AC 与 AD 的调和平均数）．

3．定比分点和调和分点支配下的圆锥曲线

在椭圆或双曲线中，设 A，B 为椭圆或双曲线上的两点，若存在 P，Q 两点，满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，则一定有：$\frac{x_Px_Q}{a^2}\pm\frac{y_Py_Q}{b^2}=1$

在抛物线 $y^2=2px$ 中，设 A，B 为抛物线上的两点．若存在 P，Q 两点，满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，一定有 $y_Py_Q=p(x_P+x_Q)$．

题型二 利用定比分点和调和分点证明特征方程

模型总结

模型一 对于抛物线的定比点差法，实际上是逆推得到的：$\dfrac{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}}{a^2}\pm\dfrac{\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}}{b^2}=1$和替换法，则$\dfrac{x_Px_Q}{a^2}\pm\dfrac{y_Py_Q}{b^2}=1$是一致的，因此可以猜想：$y_Py_Q=p(x_P+x_Q)$和$\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=p(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda})$也是一致的.

模型二 若出现$y_P=0$（或者$y_Q=0$），则$x_Px_Q=a^2$，此时$x_P=m$，$x_Q=\dfrac{a^2}{m}$；若出现$x_P=0$（或者$x_Q=0$），则$y_Py_Q=b^2$，此时$y_P=n$，$y_Q=\dfrac{b^2}{n}$．对于公式中，成对出现的“m，$\dfrac{a^2}{m}$”或者“n，$\dfrac{b^2}{n}$”，由于公式的背景和极点极线有关，不妨可以称它们为“调和共轭数”.

模型总结

坐标与比值转换定理（定比设点法）：

类型一 定点在x轴

一定有$\begin{cases}x_1=\dfrac{x_P+x_Q}{2}+\dfrac{x_P-x_Q}{2}\cdot\lambda\\x_2=\dfrac{x_P+x_Q}{2}+\dfrac{x_P-x_Q}{2\lambda}\end{cases}$（无处不在的定比设点法！！！）

证明：$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=x_P\\\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=x_Q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\lambda x_2=x_P(1+\lambda)\\x_1-\lambda x_2=x_Q(1-\lambda)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{x_P+x_Q}{2}+\dfrac{x_P-x_Q}{2}\cdot\lambda\\x_2=\dfrac{x_P+x_Q}{2}+\dfrac{x_P-x_Q}{2\lambda}\end{cases}$.

类型二　定点在 y 轴

过定点 $P(0，y_P)$ 的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交于 A、B 两点，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则一定存在点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，根据定比点差法可知 $y_Q=\frac{b^2}{y_P}$．同理：$\begin{cases} y_1=\frac{y_P+y_Q}{2}+\frac{y_P-y_Q}{2}\cdot\lambda \\ y_2=\frac{y_P+y_Q}{2}+\frac{y_P-y_Q}{2\lambda} \end{cases}$．

题型三 定比点差设点法与 λ、μ 取值范围问题

【训练 6】若椭圆 $E_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 与椭圆 $E_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$ 满足 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=m(m>0)$，则称这两个椭圆相似，$m$ 叫相似比．若椭圆 M_1 与椭圆 M_2：$x^2+2y^2=1$ 相似且过 $(1，\frac{\sqrt{2}}{2})$ 点．

（1）求椭圆 M_1 的标准方程；

（2）过点 $P(-2，0)$ 作斜率不为零的直线 l 与椭圆 M_1 交于不同两点 A、B，F 为椭圆 M_1 的右焦点，直线 AF、BF 分别交椭圆 M_1 于点 G、H，设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FG}$，$\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{FH}(\lambda，\mu\in R)$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围．

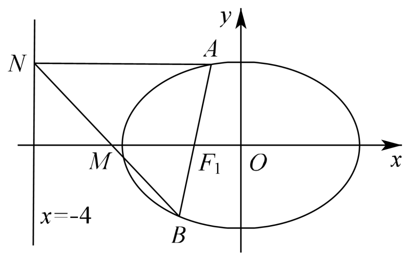
题型四　平行坐标轴的直线过定点问题

从这种题型开始，我们走进了定比点差法解题的设计体系，圆锥曲线的题目之所以能成为压轴题，一是因为其计算逻辑，不同的题型对应不同的计算方法．

【例 7】（2021•垫江模拟）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，长轴长为 $4\sqrt{2}$，A、B 为椭圆上的两个动点，当 A，B 关于原点对称时，$(|AF_2|+|BF_2|)\cdot S_{\triangle ABF_2}$ 的最大值为 $16\sqrt{2}$．

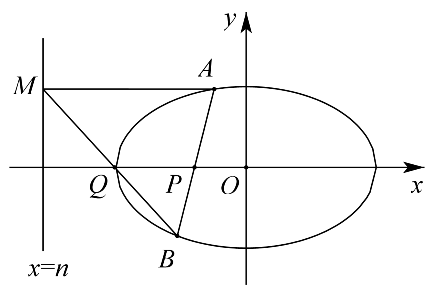
（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{AB}$，过点 A 作直线 $x=-4$ 的垂线，垂足为 N，直线 NB 是否恒过某点？若恒过某点，求出该点坐标；若不过定点，请说明理由．



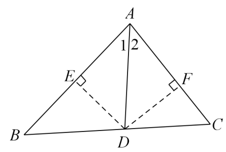
模型总结（中点截距定理）

如图所示，在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$中，$A$、$B$为椭圆上的两点，设$x$轴上一点$P(m，0)$，存在直线$x=n$和$x$轴上一点$Q$，连接$BQ$并延长交直线$x=n$于$M$，则：



①$n=\dfrac{a^2}{m}$；②直线$AM//x$轴；③$x_Q=\dfrac{m+\dfrac{a^2}{m}}{2}$． 题中知二推一．

题型五 圆锥曲线角平分线定理

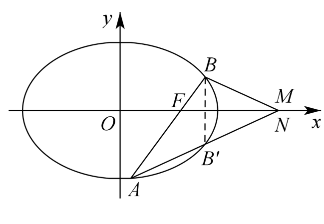


三角形的内角平分线定理：在ΔABC中，若AD是$\angle A$的平分线，则有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$．

【例9】（2018•全国卷I）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$．

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

（2）设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．



题型六 斜率和与积问题（齐次式解决不了的斜率问题）

斜率和与积问题在有了平移构造齐次式之后，被反向命题，关于 $k_{PA}+k_{PB}$ 为定值时，在不知道点 P 坐标的情况下，平移构造齐次式就会计算非常复杂，关于 k_1k_2 为定值时，由于两条直线公共点未知或者无法准确找到公共点时，平移构造齐次式将彻底无解，此时定比点差法站了出来，蜻蜓点水，快速破解.

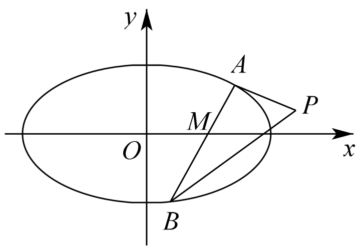
若 A、B 在圆锥曲线上，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$P(m，0)$，故根据定比设点法得出三式：

$$x_A=\frac{m+\dfrac{a^2}{m}}{2}+\frac{m-\dfrac{a^2}{m}}{2}\lambda，\quad x_B=\frac{m+\dfrac{a^2}{m}}{2}+\frac{m-\dfrac{a^2}{m}}{2\lambda}\qquad y_A+\lambda y_B=0.$$

【例 11】（2021•押题卷）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 经过点 $Q(-2,0)$ ，且直线 $bx+cy-bc=0(c=\sqrt{a^2-b^2}$ 且 $c>b)$ 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ 相切.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）若过点 $M(1，0)$ 的直线 l 交 E 于 A，B 两点，是否存在定点 P，使直线 AP 与直线 BP 的斜率之和为 2？若存在，求出该定点；若不存在，请说明理由.



模型总结

若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，过点 $M(m，0)$ 的直线与椭圆交于 A，B，存在点 P 使得 $k_{PA}+k_{PB}=t$ 成立，则一定有 $P(\dfrac{a^2}{m}，\dfrac{\dfrac{a^2}{m}-m}{2}t)$.

题型七 向量乘积为定值问题

【例 13】（2021•安庆二模）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$(b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$和$F_2(c,0)$，P为椭圆C上任意一点，三角形PF_1F_2面积的最大值是 3．

（1）求椭圆C的方程；

（2）若过点$(2,0)$的直线l交椭圆C于A，B两点，且$Q(\dfrac{9}{4}$，$0)$，证明：$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值．

题型八 蝴蝶模型之直线过定点与斜率为定值问题

抛物线的定比点差设点法，过定点$M(m,0)$的直线 AB 和抛物线$y^2=2px$

$(p>0)$相交，设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有：①$\begin{cases}m=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\-m=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}\\y_1=-\lambda y_2\end{cases}$；②$\begin{cases}x_1=m\lambda\\x_2=\dfrac{m}{\lambda}\\y_1=-\lambda y_2\end{cases}$；

③$\begin{cases}x_1x_2=m^2\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$

由于形式非常对称，我们甚至可以$\begin{cases}y_1=\sqrt{2pm\lambda}\\y_2=-\sqrt{\dfrac{2pm}{\lambda}}\end{cases}$或者$\begin{cases}y_1=-\sqrt{2pm\lambda}\\y_2=\sqrt{\dfrac{2pm}{\lambda}}\end{cases}$，具体正负号选取可以根据题意．

【例 16】（2021•济南一模）如图，A，B，M，N为抛物线$y^2=2x$上四个不同的点，直线AB与直线MN相交于点$(1，0)$，直线AN过点$(2，0)$．

（1）记A，B的纵坐标分别为y_A，y_B，求$y_A\cdot y_B$的值；

（2）记直线AN，BM的斜率分别为k_1，k_2，是否存在实数λ，使得$k_2=\lambda k_1$？若存在，求出λ的值；若不存在，说明理由．