抛物线切线与阿基米德三角形

（二）

姬秀云

【阿基米德三角形的面积问题】

在阿基米德三角形 PAB 中，根据之前所证可知：

点 $P(x_0,y_0)$，根据 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{x_1x_2}{2p}$；

底边 AB 所在的直线方程为 $xx_0=p(y+y_0)$，或者 $\dfrac{x_1+x_2}{2}x-py-\dfrac{x_1x_2}{2}=0$；

那么一定有 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{\sqrt{(x_0^2-2py_0)^3}}{p}$，或者 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{|x_1-x_2|^3}{8p}$；

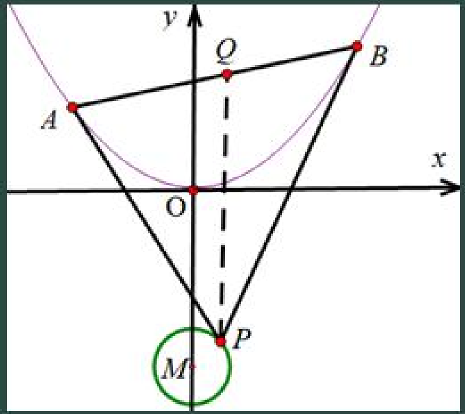
【题型 3．阿基米德三角形的面积以及面积最值问题】

例 7.(2021 全国乙卷理科 21 题)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1)求 p；

(2)若点 P 在 M 上，PA，PB 为 C 的两条切线，A，B 是切点，求 ΔPAB 面积的最大值.



例 8.(2019·新课标Ⅲ)已知曲线 $C:y=\frac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A，B.

(1)证明：直线 AB 过定点；

(2)若以 $E(0,\frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积.

例 9.(2021 •全国Ⅲ卷模拟)过直线 $y=-1$ 上动点 M,作抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的切线 MA、MB，A、B 为切点，$\angle AMB=90^\circ$.

(1)求抛物线方程；

(2)若 ΔMAB 面积为 32,求直线 AB 的斜率.

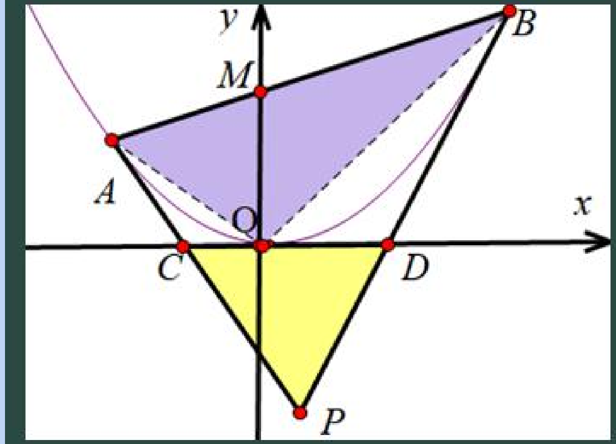
例 10.(2021·未央区校级模拟)已知抛物线 C 的顶点在坐标原点,焦点在 y 轴的正半轴上,

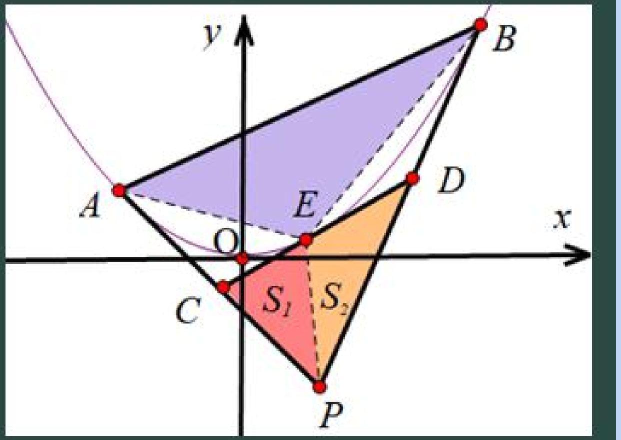
直线 $l: mx+y-\frac{3}{2}=0$ 经过抛物线的焦点.

(1)求抛物线 C 的方程;

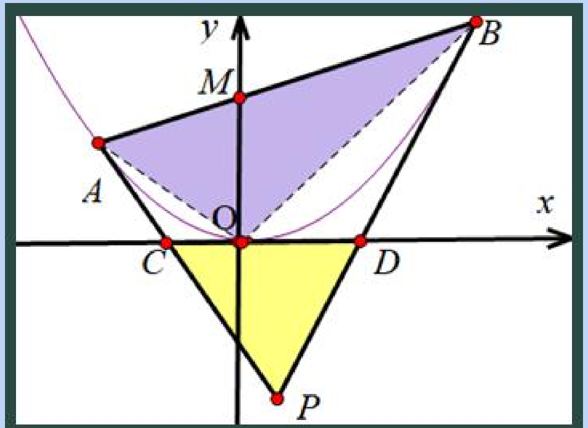
(2)若直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点,过 A, B 两点分别作抛物线 C 的切线,两条切线相交于点 P,求 ΔABP 面积的最小值.

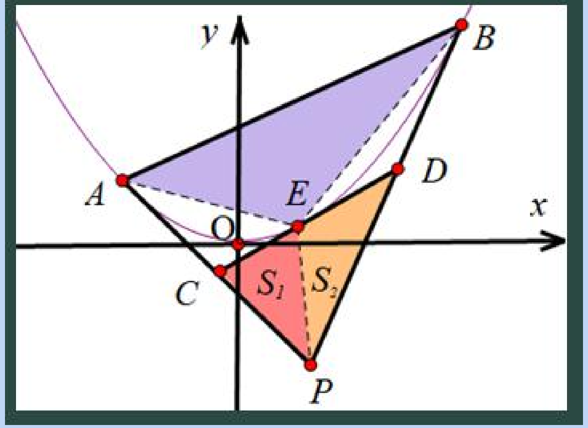
【阿基米德三角形的面积问题推论】





【阿基米德三角形的面积问题推论】





【推论1】

如左图，阿基米德三角形 PAB 中，

PA,PB 分别交 x 轴于点 C,D，

则有以下性质：

① $x_C=\dfrac{x_1}{2}$，$x_D=\dfrac{x_2}{2}$；

② $S_{\Delta PCD}=\dfrac{|x_1-x_2|}{4}|y_P|$

$=\dfrac{\sqrt{x_p^2-2py_P}}{2}|y_P|$，

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{|x_1-x_2|}{2}|y_M|$

$=\sqrt{x_p^2-2py_P}\cdot|y_P|$；

③ $S_{ACDB}=S_{\Delta PAB}-S_{\Delta PCD}$

$=\dfrac{\sqrt{(x_p^2-2py_p)^3}}{p}-\dfrac{\sqrt{x_p^2-2py_P}}{2}|y_P|$

$=\dfrac{\sqrt{x_p^2-2py_P}}{2p}(2x_P^2-3py_P)$

【推论 4】

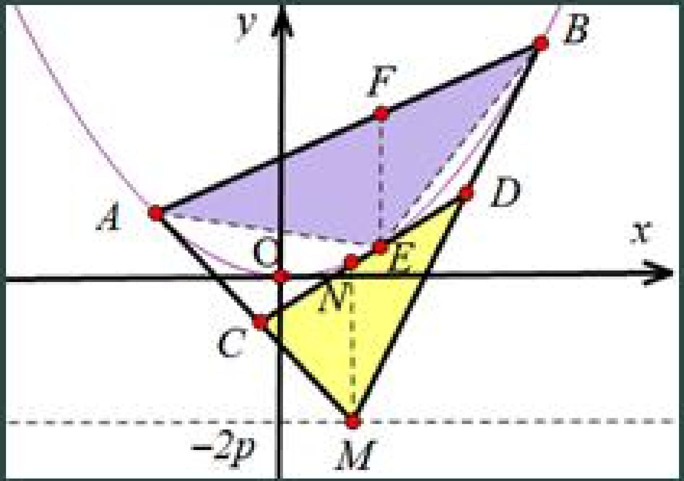
$$\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}}=2.$$

【题型 4. 阿基米德三角形涉及的面积比值为定值问题】

例 9.(2020 •浙江模拟)如图,设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点,过 M 引抛物线的切线,切点分别为 A,B.

(Ⅰ)求直线 AB 与 y 轴的交点坐标;

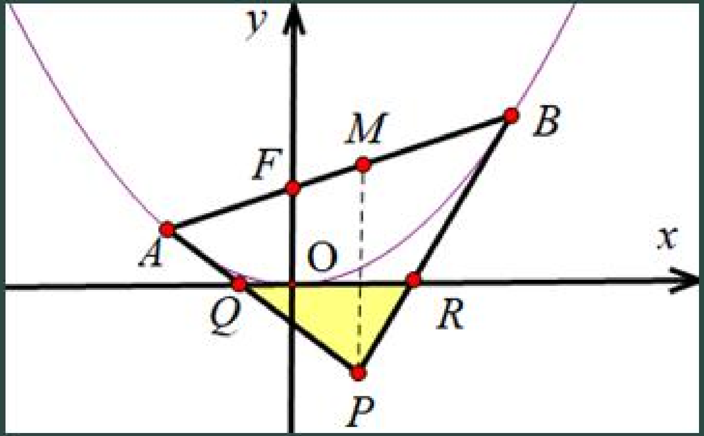
(Ⅱ)若 E 为抛物线弧 AB 上的动点,抛物线在 E 点处的切线与三角形 MAB 的边 MA,MB 分别交于点 C,D,记 $\lambda=\dfrac{S_{\Delta EAB}}{S_{\Delta MCD}}$,问 λ 是否为定值?若是求出该定值;若不是请说明理由.



例 10.(2021 •中卫二模)已知点 F 是抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点，P 是其准线 l 上任意一点，过点 P 作直线 PA，PB 与抛物线 C 相切，A，B 为切点，PA，PB 与 x 轴分别交于 Q，R 两点.

(Ⅰ)求焦点 F 的坐标，并证明直线 AB 过点 F；

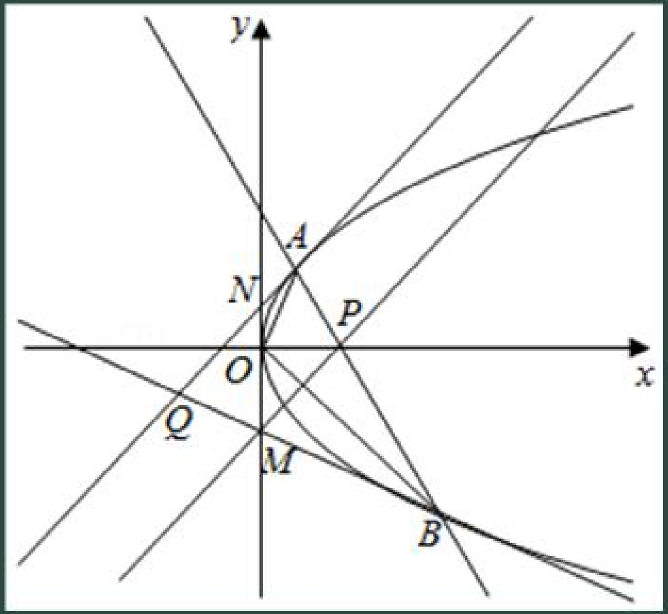
(Ⅱ)求四边形 $ABRQ$ 面积的最小值.



例 11.(2021·浙江模拟)如图,已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$,过点 $P(m,0)(m>0)$ 的直线交抛物线于 A,B 两点,过点 B 作抛物线的切线交 y 轴于点 M,过点 A 作 AN 平行 PM 交 y 轴于点 N,交直线 BM 于点 Q.

(1)若 $p=m=1$,求 $|AB|$ 的最小值;

(2)若 ΔAOB 的面积为 S_1,ΔMNQ 的面积为 S_2,求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.



例12.(2012• 江西卷) 已知三点 $O(0,0)$，$A(-2,1)$，$B(2,1)$，曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$ 满足 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2$.

(1) 求曲线 c 的方程；

(2) 动点 $Q(x_0,y_0)(-2<x_0<2)$ 在曲线 C 上，曲线 C 在点 Q 处的切线为直线 l 是否存在定点 $P(0,t)(t<0)$，使得 l 与 PA，PB 都相交，交点分别为 D，E，且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数？若存在，求 t 的值．若不存在，说明理由．

例13.(2020·嵊州市二模)如图,已知抛物线$C:x^2=4y$,设直线l经过点$Q(1,2)$且与抛物线C相交于AB两点,抛物线C在A,B两点处的切线相交于点P,直线PA,PB分别与x轴交于D,E两点.

(Ⅰ)求点P的轨迹方程;

(Ⅱ)当点P不在x轴上时,记ΔPDE的面积为S_1,ΔPAB的面积为S_2,求$\dfrac{S_2}{S_1}$的最小值.