开放性的生活实践问题情境

基本层面的问题情境

综合层面的问题情境

情境问题在概率中的运用

王雪美

生活实践问题情境

学习探索问题情境

情境一：冬奥会

考向1　二项分布

1、第24届冬奥会于2022年2月4日至2月20日在北京举行，冬季两项是冬奥会的正式项目之一，冬季两项是把越野滑雪和射击两种特点不同的竞赛项目结合在一起进行的运动，要求运动员既要有由动转静的能力，又要有由静转动的能力.20km男子个人赛是冬季两项中最古老的奥运项目，分成5个阶段：第1圈滑行后卧射，第2圈滑行后立射，第3圈滑行后卧射，第4圈滑行后立射，第5圈滑行直达终点．比赛时，运动员单个出发，随身携带枪支和20发子弹，每轮射击发射5发子弹，每脱靶一次加罚一圈，假设加罚一圈所需时间为1分钟．成绩的计算是越野滑雪的全程时间加被罚的时间，比赛结束所耗总时间少者获胜．已知甲、乙两名参赛选手在射击时每发子弹命中目标的概率均为0.8.

(1)试求甲选手在一轮射击中，被罚时间X的分布列及期望；

(2)若甲、乙两名选手在滑道上滑行所耗时间相同，在前三轮射击中甲选手比乙选手多罚了3分钟，试求在四轮射击结束后，甲选手所罚总时间比乙选手所罚总时间少的概率（保留小数点后4位）.

（参考数据：$0.8^5=0.32768$　$0.8^4=0.4096$　）

考向1　二项分布

情境一：冬奥会

(1)试求甲选手在一轮射击中，被罚时间X的分布列及期望；

【解析】因为一轮射击中，共发射5发子弹，脱靶一次罚时1分钟，

所以一轮射击中，被罚时间X的值可能为0，1，2，3，4，5．

$P(X=0)=0.8^5=0.32768$　$P(X=1)=C_5^1 0.2\times 0.8^4=0.4096$　$P(X=2)=C_5^2(0.2)^2\times 0.8^3=0.2048$

$P(X=3)=C_5^3(0.2)^3\times 0.8^2=0.0512$　$P(X=4)=C_5^4(0.2)^4\times 0.8=0.0064$　$P(X=5)=C_5^5(0.2)^5=0.00032$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.32768	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.00032

依题意，被罚时间 X 满足二项分布，所以 $EX=5\times 0.2=1$；

考向1　二项分布

情境一：冬奥会

(2)若甲、乙两名选手在滑道上滑行所耗时间相同，在前三轮射击中甲选手比乙选手多罚了3分钟，试求在四轮射击结束后，甲选手所罚总时间比乙选手所罚总时间少的概率（保留小数点后4位）．（参考数据：$0.8^5=0.32768$　$0.8^4=0.4096$　）

解：依题意，甲选手所罚总时间比乙选手所罚总时间少，在第四轮射击中，共有两种可能，第一种情况，甲5发子弹都击中，乙击中0发或1发；第二种情况，甲击中4发子弹，乙击中0发，所以甲选手所罚总时间比乙选手所罚总时间少的概率为

$$P=0.8^5\times\left(0.2^5+C_5^1 0.2^4\times0.8\right)+C_5^1 0.2\times0.8^4\times0.2^5=0.0023$$

思维升华

1、判断某随机变量是否服从二项分布的关键点

(1)在每一次试验中，事件发生的概率相同.

(2)各次试验中的事件是相互独立的.(有放回的抽取)

(3)在每一次试验中，试验的结果只有两个，即发生与不发生.

2、若$X\sim B(n，p)$，则$E(X)=$ $\underline{np}$ ，$D(X)=$ $\underline{np(1-p)}$.

情境一：冬奥会

2、单板滑雪 U型池比赛是冬奥会比赛中的一个项目，进入决赛阶段的12名运动员按照预赛成绩由低到高的出场顺序轮流进行三次滑行，裁判员根据运动员的腾空高度、完成的动作难度和效果进行评分，最终取单次最高分作为比赛成绩．现有运动员甲、乙二人在2021赛季单板滑雪型池世界杯分站比赛成绩如下表：

分站	运动员甲的三次滑行成绩			运动员乙的三次滑行成绩		
	第1次	第2次	第3次	第1次	第2次	第3次
第1站	80.20	86.20	84.03	80.11	88.40	0
第2站	92.80	82.13	86.31	79.32	81.22	88.60
第3站	79.10	0	87.50	89.10	75.36	87.10
第4站	84.02	89.50	86.71	75.13	88.20	81.01
第5站	80.02	79.36	86.00	85.40	87.04	87.70

假设甲、乙二人每次比赛成绩相互独立．

（1）从上表5站中随机选取1站，求在该站运动员甲的成绩高于运动员乙的成绩的概率；

（2）从上表5站中任意选取2站，用X表示这2站中甲的成绩高于乙的成绩的站数，求X的分布列和数学期望；

情境一：冬奥会

假设甲、乙二人每次比赛成绩相互独立.

（1）从上表5站中随机选取1站，求在该站运动员甲的成绩高于运动员乙的成绩的概率；

（2）从上表5站中任意选取2站，用X表示这2站中甲的成绩高于乙的成绩的站数，求X的分布列和数学期望；

分站	运动员甲的三次滑行成绩			运动员乙的三次滑行成绩		
	第1次	第2次	第3次	第1次	第2次	第3次
第1站	80.20	86.20	84.03	80.11	88.40	0
第2站	92.80	82.13	86.31	79.32	81.22	88.60
第3站	79.10	0	87.50	89.10	75.36	87.10
第4站	84.02	89.50	86.71	75.13	88.20	81.01
第5站	80.02	79.36	86.00	85.40	87.04	87.70

【解析】(1)解：设"该站运动员甲的成绩高于该站运动员乙的成绩"为事件A；

运动员甲第1站、第2站、第3站、第4站、第5站的成绩分别为：

86.20、92.80、87.50、89.50、86.00，

运动员乙第1站、第2站、第3站、第4站、第5站的成绩分别为：

88.40、88.60、89.10、88.20、87.70，

其中第2站和第4站甲的成绩高于乙的成绩，

$\therefore$ $$P(A)=\frac{2}{5}$$

情境一：冬奥会

考向2　超几何分布

（2）从上表5站中任意选取2站，用X表示这2站中甲的成绩高于乙的成绩的站数，求X的分布列和数学期望；

解：X的可能取的值为0，1，2，

则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$　　$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$　　$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}=\frac{1}{10}$

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

情境一：冬奥会

考向2　超几何分布

（3）假如从甲、乙2人中推荐1人参加2022年北京冬奥会单板滑雪 U型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由．（注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$）

分站	运动员甲的三次滑行成绩			运动员乙的三次滑行成绩		
	第1次	第2次	第3次	第1次	第2次	第3次
第1站	80.20	86.20	84.03	80.11	88.40	0
第2站	92.80	82.13	86.31	79.32	81.22	88.60
第3站	79.10	0	87.50	89.10	75.36	87.10
第4站	84.02	89.50	86.71	75.13	88.20	81.01
第5站	80.02	79.36	86.00	85.40	87.04	87.70

情境一：冬奥会

考向2　超几何分布

（3）假如从甲、乙2人中推荐1人参加2022年北京冬奥会单板滑雪 U型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由．（注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$ ）

答案一：推荐甲．

甲5站的平均成绩为：$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}(86.20+92.80+87.50+89.50+86.00)=88.40$

乙5站的平均成绩为：$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}(88.40+88.60+89.10+88.20+87.70)=88.40$

甲乙5站的平均成绩虽然相同，但是甲成绩的极大值为92.80，乙成绩的极大值为89.10，甲成绩的极大值高于乙成绩的极大值，所以甲的成绩会比乙的更好．

情境一：冬奥会

考向2　超几何分布

（3）假如从甲、乙2人中推荐1人参加2022年北京冬奥会单板滑雪 U型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由．　注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$

答案二：推荐乙．

甲5站的平均成绩为：$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}(86.20+92.80+87.50+89.50+86.00)=88.40$

乙5站的平均成绩为：$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}(88.40+88.60+89.10+88.20+87.70)=88.40$

甲5站成绩方差为：$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\left[(88.40-86.20)^2+(88.40-92.80)^2+(88.40-87.50)^2+(88.40-89.50)^2+(88.40-86.00)^2\right]=6.396$

乙5站成绩方差为：$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\left[(88.40-88.40)^2+(88.40-88.60)^2+(88.40-89.10)^2+(88.40-88.20)^2+(88.40-87.70)^2\right]=0.212$

$\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$ 说明甲乙二人水平相当，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$ 表明乙的发挥比甲的更稳定，

所以预测乙的成绩会更好．

情境一：冬奥会

考向2　超几何分布

（3）假如从甲、乙2人中推荐1人参加2022年北京冬奥会单板滑雪 *U*型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由．（注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$）

（1）从上表5站中随机选取1站，求在该站运动员甲的成绩高于运动员乙的成绩的概率；

答案三：推荐乙．

理由是：从2021赛季前5站的成绩可以看出：任意1站运动员甲的成绩高于该站运动员乙的成绩的概率为$\frac{2}{5}$，

乙的成绩高于该站运动员甲的成绩的概率为$\frac{3}{5}$．

因为$\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，所以乙的成绩好于甲的成绩的可能性大．

思维升华

超几何分布：

1.超几何分布描述的是<u>不放回</u>抽样问题，随机变量为抽到的某类个体的个数.

超几何分布的特征是：

①考察对象分两类；②已知各类对象的个数；③从中抽取若干个个体，考查某类个体数X的概率分布.

2.超几何实质是<u>古典概型</u>.

3.若$X \sim H(N, n, M)$，则$E(X)=\dfrac{nM}{N}$

情境二：新冠肺炎

3、（2021年北京卷18改编）为加快新冠肺炎核酸检测效率，某检测机构采取“k合1检测法”：将k个人的咽拭子采样进行合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都为阴性；若为阳性，则k个人再做检测. 现有100人，已知 其中2人感染病毒.

(1)(i)若采用“10合1检测法”，且两名感染者在同一组，求总检值测次数；

(ii)已知10人分成一组，两名感染者同组的概率是 $\frac{1}{11}$，定义随机变量X是总检测次数，求检测次数X的分布列和数学期望E(X).

(2)若采用“5合1检测法”，检测次数Y的期望为 $E(Y)$，试比较$E(X)$和$E(Y)$的大小（写出结果，并简单阐述理由）.

解：(1)(i)用“10合1检测"，需将100人分成10组，每组测一次， 需要检测10次；因为感染的2人在同一组，所以其他9组检测阴性，感染的2人所在的组为阳性，每人再检测一次，需要检测10次，所以共需要检测10+10=20(次).

(ii)检测次数X的所有可能取值为20，30，则 $p(X=20)=\frac{1}{11}, p(X=30)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$,

所以 X 的分布列为

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

$$E(X)=20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{10}{11}=\frac{320}{11}$$

情境二：新冠肺炎

(3)若采用“10合1检测法”，两人同组的概率为 p_1，分布列为

X	20	30
P	p_1	$1-p_1$

$$E(X)=20p_1+30(1-p_1)=30-10p_1;$$

若采用“5合1检测法”，两人同组的概率为 p_2，分布列为

Y	25	30
P	p_2	$1-p_2$

$$E(Y)=25p_2+30(1-p_2)=30-5p_2;$$

$$\because p_1>p_2$$

$$\therefore E(Y)>E(X)$$

情境二：新冠肺炎

考向4　独立性检验、正态分布

4、新冠肺炎，全民防控.冠状肺炎的感染主要是人与人之间进行传播，可以通过飞沫、粪便、接触等进行传染.冠状肺炎感染人群年龄大多是40岁以上的人群.该病毒进入人体后有潜伏期(潜伏期是指病原体侵入人体至最早出现临床症状的这段时期)，潜伏期越长，感染到他人的可能性越高.现对200个病例的潜伏期(单位：天)进行调查，统计发现潜伏期的中位数为5，平均数为7.1，方差为5.06，一般认为超过8天的潜伏期属于“长潜伏期”，按照年龄统计样本，得到下面的 2×2列联表：

	长潜伏期	非长潜伏期
40岁以上	30	110
40岁及40岁以下	20	40

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

若随机变量Z服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$\sqrt{5.06}\approx 2.25$.

（1）能否有 95%的把握认为“长潜伏期”与年龄有关？

（2）假设潜伏期服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ近似为样本平均数，σ^2近似为样本方差.很多省份对入境人员一律要求隔离14天，请用概率和统计的知识解释其合理性；

解（1）$K^2=\dfrac{200(30\times 40-110\times 20)^2}{140\times 60\times 50\times 150}\approx 3.17$

由于$3.17<3.841$，故没有的把握认为“长潜伏期”与年龄有关；

情境二：新冠肺炎

考向4　独立性检验、正态分布

4、新冠肺炎，全民防控.冠状肺炎的感染主要是人与人之间进行传播，可以通过飞沫、粪便、接触等进行传染.冠状肺炎感染人群年龄大多是40岁以上的人群.该病毒进入人体后有潜伏期(潜伏期是指病原体侵入人体至最早出现临床症状的这段时期)，潜伏期越长，感染到他人的可能性越高.现对200个病例的潜伏期(单位：天)进行调查，统计发现潜伏期的中位数为5，平均数为7.1，方差为5.06，一般认为超过8天的潜伏期属于“长潜伏期”。

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$\sqrt{5.06}\approx 2.25$.

（2）假设潜伏期服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数，σ^2 近似为样本方差.很多省份对入境人员一律要求隔离14天，请用概率和统计的知识解释其合理性；

解（2）因为潜伏期服从 $N(7.1,2.25^2)$，

由 $P(Z\geq 13.85)=\dfrac{1-0.9974}{2}=0.0013$

得潜伏期超过14天的概率很低，因此隔离14天是合理的.

思维升华

正态分布3σ原则

$P(|X-\mu|\leqslant\sigma)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx$__68.3%__，

$P(|X-\mu|\leqslant 2\sigma)=P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx$__95.4%__，

$P(|X-\mu|\leqslant 3\sigma)=P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx$__99.7%__.

正态分布的均值与方差

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X)=$__μ__，$D(X)=$__σ^2__.

【课堂小结】

情境问题概率应用

核心知识

1.二项分布.
2.超几何分布.
3.独立性检验
4.正态分布.

易错提醒

超几何分布与二项分布的区别

不放回抽取　与　有放回抽取

核心素养

1.数学抽象：生活实践问题抽象成数学问题。

2.数学建模：二项分布、超几何分布、正态分布。

3.数学运算：求概率、期望与方差。

4.数据分析：决策问题。