从20年山东卷22题看通过平移构造齐次式解决定点问题

周长东

真题回顾

山东卷22题

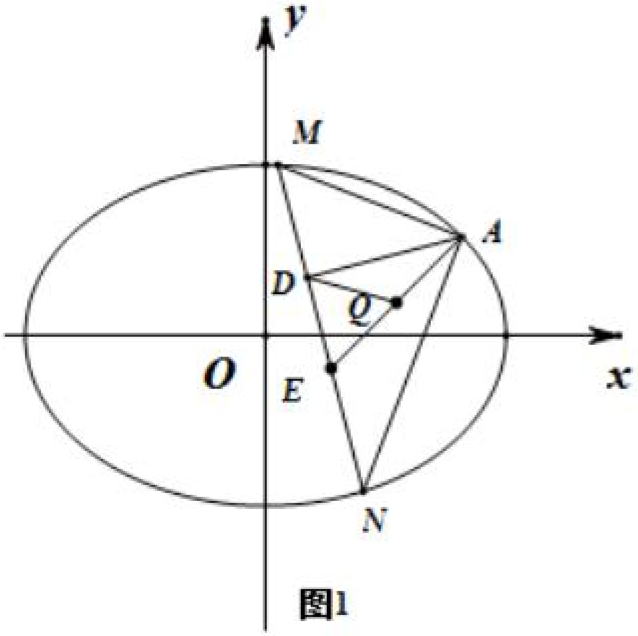


图1

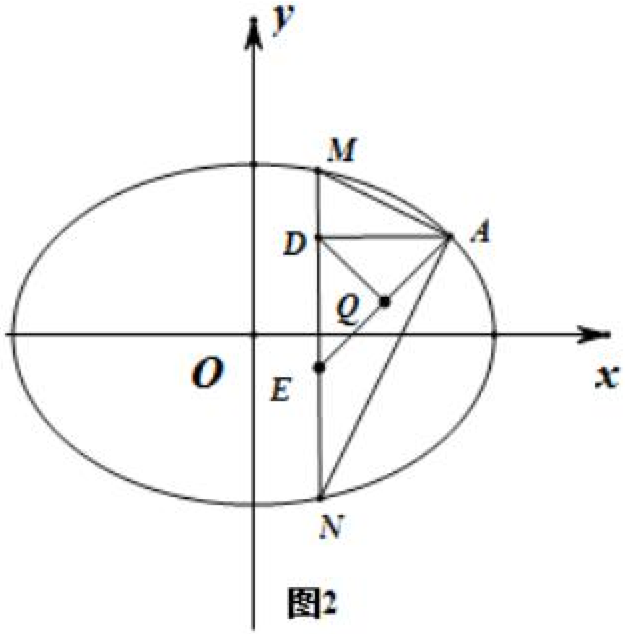


图2

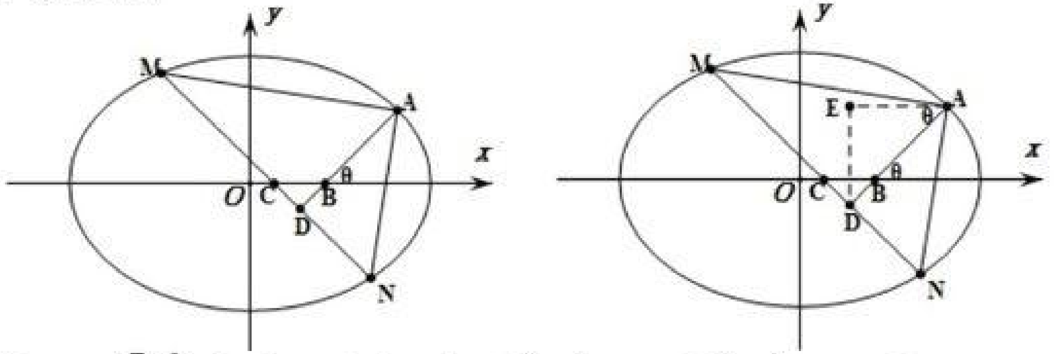
22.已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 A（2，1）.

（1）求 C 的方程；

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值．

例 6(2020 山东)、已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点A（2,1）；

(1)求C的方程；(2)点M,N在C上，且AM ⊥ AN, AD ⊥ MN, D为垂足，证明:存在定点Q使得|DQ|为定值；



解:(1)$e=\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2},a^2=2c^2,b^2=c^2$,又 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，即$\frac{4}{2c^2}+\frac{1}{c^2}=1$，$c^2=3$,

故$a^2=6$，$b^2=3$, 椭圆C: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$;

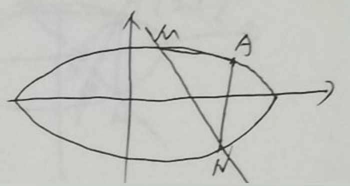
(2) '熟练掌握直线参数方程 ，双垂直多明显的提示啊，

设直线AB倾斜角为θ,则∠CBD = θ（对顶角相等），∠BCD = 90° − θ，则MN倾斜角为$180°-(90°-\theta)=90°+\theta$,设$D(x_0,y_0)$则直线MN参数方程可设为

$x=x_0+t\cos(90°+\theta)=x_0-t\sin\theta, y=y_0+t\sin(90°+\theta)=y_0+t\cos\theta$,与椭圆联立整理得$(\cos^2\theta+1)t^2+t(4y_0\cos\theta-2x_0\sin\theta)t+x_0^2+2y_0^2-6=0$,由直线参数方程几何意义可得$|MD||DN|=|t_1t_2|=|\frac{x_0^2+2y_0^2-6}{\cos^2\theta+1}|$,而D在椭圆里$x_0^2+2y_0^2-6<0$，则 $|MD||DN|=\frac{-x_0^2-2y_0^2+6}{\cos^2\theta+1}$,过点A作直线L平行于x轴，过点D作直线DE ⊥ L于E,则∠EAD = ∠CBD = θ（同位角），在$R_{t\Delta AED}$中$\cos\theta=\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{2-x_0}{\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2}}$,故 $|MD||DN|=\frac{-x_0^2-2y_0^2+6}{\frac{2(x_0-2)^2+(y_0-1)^2}{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2}}$，又由射影定理可得 $|MD||DN|=|AD|^2=(x_0-2)^2+(y_0-1)^2$,故$-x_0^2-2y_0^2+6=2(x_0-2)^2+(y_0-1)^2$，展开配方得 $(x_0-\frac{4}{3})^2+(y_0-\frac{1}{3})^2=(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$，故存在$Q(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$, $|DQ|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

解: (1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

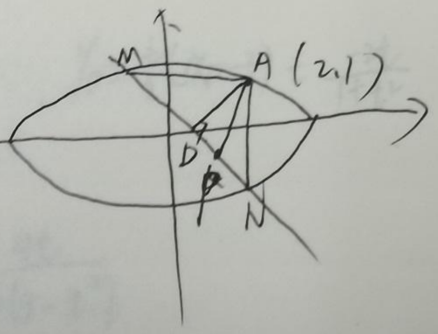
(2). 设 l_{MN}: $x=ty+m$.



联立 $\begin{cases} x=ty+m \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$

过定点, P$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

则 $|PA|=\sqrt{(\frac{2}{3}-2)^2+(-\frac{1}{3}-1)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.



取AP中点 Q$(\frac{8}{3},\frac{1}{3})$

则|DQ|为定值 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$x_2=ty_2+m$.

$\therefore x_1x_2=t^2y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2$

$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2m$

$\therefore (t^2+1)y_1y_2+(mt-2t-1)(y_1+y_2)+m^2-4m+5=0$

$\therefore t^2-3m^2-2mt+8m-4=0$ 运算处理.

$\therefore t^2-2mt-(3m-2)(m-2)=0$

$\therefore [t-(3m-2)][t+(m-2)]=0$

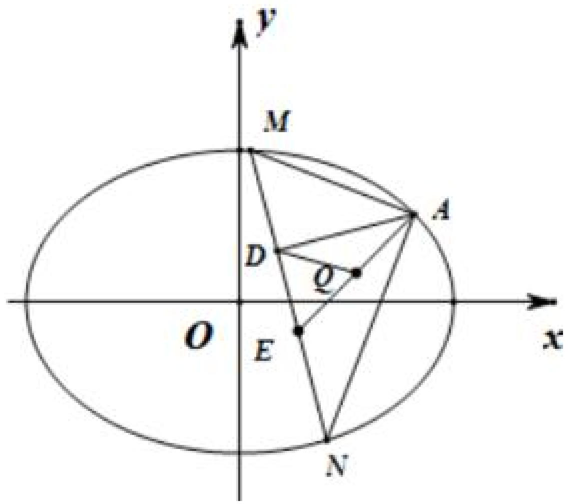
$\therefore t=3m-2$ 或 $t=-(m-2)$.

① 当 $t=-(m-2)$ 时. $x=-(m-2)y+m$ 即: $x-2=-(m-2)y+m-2$.

即: $x-2=-(m-2)(y-1)$. 过定点(2,1)与A重合(舍).

② 当 $t=3m-2$ 时. $x=(3m-2)y+m$, 即: $x-\frac{2}{3}=(3m-2)(y+\frac{1}{3})$

不难发现解决第二问的关键是直线过定点，经过探索我们也可得到一般的结论：
P为椭圆上任意定点，M,N 为椭圆上两定点，当PM,PN斜率之和，斜率积为定值时，MN均过定点！



思考探究：

如果定点P不在圆锥曲线上时，斜率积，斜率和为定值时，MN是否过定点？若过定点该如何解决?

题型特征：

当出现定点（可能在椭圆内，也可在椭圆上，亦或者在椭圆内部），椭圆上两定点，斜率和或积为定值。

解题套路：

1、将椭圆和定点P按照向量PO方向平移，使得P与原点重合！（当然也可平移坐标系）
2、直线方程设法：mx+my=1
3、联立直线与椭圆，注意不是消去x或y,而是将“1”用mx+ny替换，等号两边出现关于x，y的齐次式！
4、同除x^2,转化成关于y/x的二次方程.则PM,PN斜率为此方程两根！
5、利用韦达定理，找到m,n关系，得定点！