# 同角三角函数的基本关系式

周长东

教学目的：

知识目标：1. 能根据三角函数的定义导出同角三角函数的基本关系式及它们之间的联系；

2. 熟练掌握已知一个角的三角函数值求其它三角函数值的方法。

能力目标： 牢固掌握同角三角函数的两个关系式，并能灵活运用于解题，提高学生分析、解决三角的思维能力；

教学重点：同角三角函数的基本关系式

教学难点：三角函数值的符号的确定，同角三角函数的基本关系式的变式应用

教学过程：

一、复习引入：

1．任意角的三角函数定义：

设角$\alpha$是一个任意角，$\alpha$终边上任意一点$P(x,y)$，它与原点的距离为

$r(r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，那么：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，

2．当角α分别在不同的象限时，sinα、cosα、tgα的符号分别是怎样的？

3．背景：大家都听过一句话：南美洲亚马逊河雨林中的一只蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国德克萨斯州的一场龙卷风.这就是著名的“蝴蝶效应”，他本意是说事物初始条件的微弱变化可能会引起结果的巨大变化.两个似乎毫不相干的事物，却有着这样的联系.那么“同一个角”的三角函数一定会有非常密切的关系！底是什么关系呢？这就是本节课所研究的问题.

4．问题：填表

| | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ | $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30° | | | | | |
| 45° | | | | | |
| 60° | | | | | |

2.由于α的三角函数都是由x、y、r 表示的，则角α的三个三角函数之间有什么关系？

二、讲解新课：

（一）同角三角函数的基本关系式：

（板书课题：同角的三角函数的基本关系）

1. 由三角函数的定义，我们可以得到以下关系：

（1）商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{con\alpha}$ （2）平方关系：$\sin^2\alpha+con^2\alpha=1$

说明：

①注意“同角”，至于角的形式无关重要，如$\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha=1$等；

②注意这些关系式都是对于使它们有意义的角而言的，如$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in Z)$；

③对这些关系式不仅要牢固掌握，还要能灵活运用（正用、反用、变形用），如：

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$， $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$， $\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$等。

2．例题分析：

一、求值问题

例1.（1）已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，并且$\alpha$是第二象限角，求$\cos\alpha,\tan\alpha$ .

变式：已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，并且$\alpha$是第二象限角，求$\cos\alpha,\tan\alpha$.

总结：

1. 已知一个角的某一个三角函数值，便可运用基本关系式求出其它三角函数值。在求值中，确定角的终边位置是关键和必要的。有时，由于角的终边位置的不确定，因此解的情况不止一种。
2. 解题时产生遗漏的主要原因是：①没有确定好或不去确定角的终边位置；②利用平方关系开平方时，漏掉了负的平方根。

例 2．已知$\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且$\alpha$是第二象限角，求 $\sin\alpha,\cos\alpha$.

变式2：已知$\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

（1）$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　　（2）$2\sin\alpha\cos\alpha$

（3）$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$　　（4）$1-2\sin\alpha\cos\alpha$

变式3：已知$\tan\alpha = 2$ ，$180^0 < \alpha < 270^0,$ 求$\sin\alpha - \cos\alpha$

例 3、已知$\sin\alpha = 2\cos\alpha$，求$\dfrac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{5\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ (2)$2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha$.

解：$\because \sin\alpha = 2\cos\alpha \qquad \therefore \tan\alpha = 2$

$$\therefore \frac{\sin\alpha - 4\cos\alpha}{5\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha - 4}{5\tan\alpha + 2} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

**强调（指出）技巧：1° 分子、分母是正余弦的一次（或二次）齐次式**

注意所求值式的分子、分母均为一次齐次式，把分子、分母同除以$\cos\alpha$,将分子、分母转化为$\tan\alpha$的代数式；

**2° “化 1 法”**

可利用平方关系$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，将分子、分母都变为二次齐次式，再利用商数关系化归为$\tan\alpha$的分式求值；

小结：化简三角函数式，化简的一般要求是：

（1）尽量使函数种类最少，项数最少，次数最低；

（2）尽量使分母不含三角函数式；

（3）根式内的三角函数式尽量开出来；

（4）能求得数值的应计算出来，其次要注意在三角函数式变形时，常将式子中的“1”作巧妙的变形，

二、化简

练习 1．化简$\sqrt{1 - \sin^2 440^\circ}$．

解：原式$= \sqrt{1 - \sin^2(360^\circ + 80^\circ)} = \sqrt{1 - \sin^2 80^\circ} = \sqrt{\cos^2 80^\circ} = \cos 80^\circ$．

练习 2．**化简** $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \qquad (\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2})$

三、证明恒等式

例 4．求证：$\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$．

证法一：由题义知$\cos x \neq 0$，所以$1 + \sin x \neq 0, 1 - \sin x \neq 0$．

$\therefore$左边$= \dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x} =$右边.

$\therefore$原式成立.

证法二：由题义知$\cos x \neq 0$，所以$1 + \sin x \neq 0, 1 - \sin x \neq 0$．

又$\because (1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$，

$\therefore \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$．

证法三：由题义知$\cos x \neq 0$，所以$1+\sin x \neq 0, 1-\sin x \neq 0$．

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x \cdot \cos x-(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}=\frac{\cos^2 x-1+\sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x}=0,$$

$$\therefore \frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

总结：证明恒等式的过程就是分析、转化、消去等式两边差异来促成统一的过程，证明时常用的方法有：（1）从一边开始，证明它等于另一边；

（2）证明左右两边同等于同一个式子；

（3）证明与原式等价的另一个式子成立，从而推出原式成立。

四、小　　结：本节课学习了以下内容：

1．同角三角函数基本关系式及成立的条件；

2．根据一个角的某一个三角函数值求其它三角函数值；

五、课后作业：《习案》作业第 五 课时

**参考资料**

化简$\sqrt{1-2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}$．

解：原式$=\sqrt{\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ-2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}$

$=\sqrt{(\sin 40^\circ-\cos 40^\circ)^2}=|\cos 40^\circ-\sin 40^\circ|=\cos 40^\circ-\sin 40^\circ$．

思考 1．已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$　$(0<\theta<\pi)$，求$\tan\theta$及$\sin^3\theta-\cos^3\theta$的值。

解：1° 由$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，　$0<\theta<\pi$，　得：　$\cos\theta<0$　　$\therefore \theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

由$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{49}{25}$，　　得：　$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$　　　联立：

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow \tan\theta=-\frac{4}{3}$$

2°　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\frac{4}{5})^3-(-\frac{3}{5})^3=\frac{91}{125}$

2、已知$\sin\alpha=\frac{4-2m}{m+5}$，　$\cos\alpha=\frac{m-3}{m+5}$，　$\alpha$是第四象限角，求$\tan\alpha$的值。

解：$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　　$\therefore (\frac{4-2m}{m+5})^2+(\frac{m-3}{m+5})^2=1$

化简，整理得：$m(m-8)=0$　　$\therefore m_1=0,\quad m_2=8$

当$m=0$时，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，　$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，　(与$\alpha$是第四象限角不合）

当 $m=8$ 时，$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\therefore\tan\alpha=-\frac{12}{5}$