正弦、余弦定理专题课

数学组 周长东

必 备 知 识

1．正弦、余弦定理

在$\triangle ABC$中，若角A，B，C所对的边分别是a，b，c，R为$\triangle ABC$的外接圆半径，则

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$	$a^2=$ $\underline{\quad b^2+c^2-2bc\cos A\quad}$； $b^2=$ $\underline{\quad c^2+a^2-2ca\cos B\quad}$； $c^2=$ $\underline{\quad a^2+b^2-2ab\cos C\quad}$.

变形	(1)$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$， $c=2R\sin C$； (2)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$； (3)$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2R$.	$\cos A=$ $\underline{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$； $\cos B=$ $\underline{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}}$； $\cos C=$ $\underline{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$.

2.三角形常用面积公式

(1)$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$(h_a表示边a上的高)；

(2)$S=\frac{1}{2}ab\sin C=$ $\underline{\frac{1}{2}ac\sin B}$ $=$ $\underline{\frac{1}{2}bc\sin A}$；

(3)$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r为内切圆半径).

[常用结论]

1． 三角形中的射影定理：在△ABC 中，

$a=b\cos C+c\cos B$；

$b=a\cos C+c\cos A$；

$c=b\cos A+a\cos B$.

2.在△ABC中,大角对大边,大边对大角,如:$a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow \sin A>\sin B$;

3.任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边;

4.在锐角三角形ABC中,$\sin A>\cos B\Leftrightarrow A+B>\dfrac{\pi}{2}$;

5.在斜△ABC中,$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$;

6.有关三角形内角的常用三角恒等式

:$\sin(A+B)=\sin C$;

$\cos(A+B)=-\cos C$;

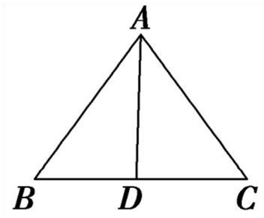
$\tan(A+B)=-\tan C$ ； $\left(A+B\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$

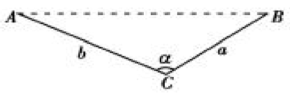
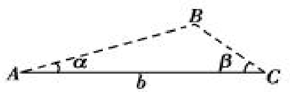
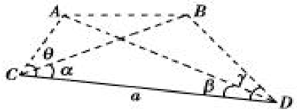
7．角平分线定理：在△ABC中，若AD是角A的平分线，如图，

则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

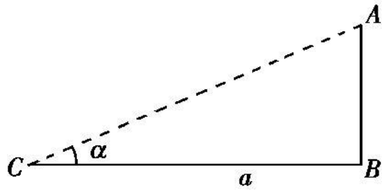
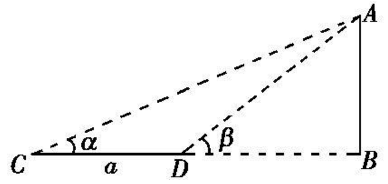


二、解三角形及其综合应用

1.距离的测量

背景	可测元素	图形	目标及解法
两点均可到达	a、b、α		求 AB： $AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$
只有一点可到达	b、α、β		求 AB： (1)$B=180°-\alpha-\beta$； (2)用$\dfrac{AB}{\sin\beta}=\dfrac{b}{\sin B}$求 AB
两点都不可到达	a、α、β、γ、θ		求 AB：(1)在$\triangle ACD$中，用$\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin(180°-\theta-\beta)}$求 AC； (2)在$\triangle BCD$中，用$\dfrac{BC}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin(180°-\alpha-\gamma)}$求 BC； (3)在$\triangle ABC$中，用$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos(\theta-\alpha)$求 AB

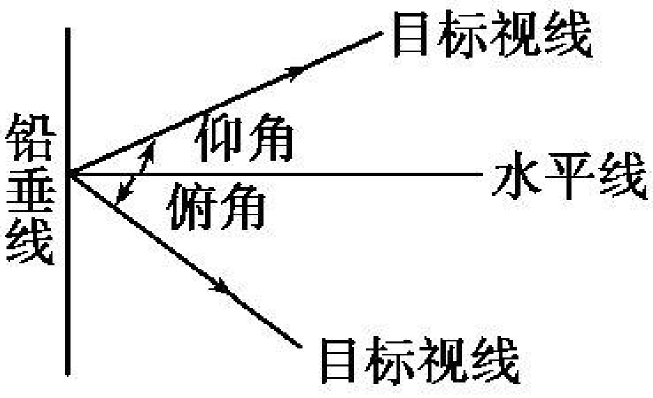
2.高的测量

背景	可测 元素	图形	目标及解法
底部可到达	a、α		求AB: $AB=a\tan\alpha$
底部不可到达	a、α、β		求AB: (1)在△ACD中,用正弦定理求AD; (2)$AB=AD\sin\beta$

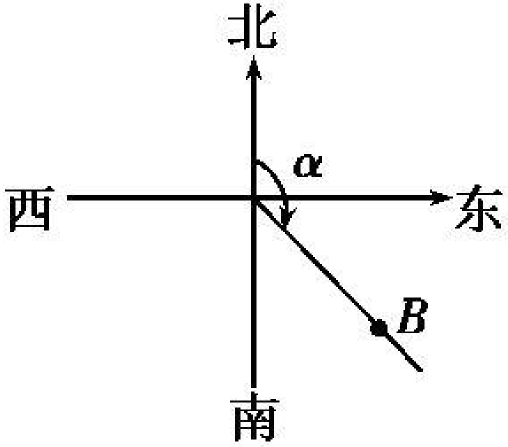
3.实际问题中的常用角

(1)仰角和俯角

与目标视线在同一铅垂平面内的水平线和目标视线的夹角中,目标视线在水平线上方的叫做仰角,目标视线在水平线下方的叫做俯角(如图(a)所示).



图(a)



图(b)

(2)方位角

方位角是指从某点的正北方向顺时针转到目标方向线的水平角,如B点的方位角为α(如图(b)所示).

(3)坡角

坡角是指坡面与水平面所成的锐二面角.

本节课主要培养这两项能力

1. 正余弦定理的应用

2. 公式的转化和计算

题型一：定理公式复习

1．在三角形 ABC 中，根据下列条件解三角形，其中有两个解的是（　　）

A．$b=10$，$A=45°$，$B=70°$　　B．$a=60$，$c=48$，$B=60°$

C．$a=7$，$b=5$，$A=80°$　　D．$a=14$，$b=16$，$A=45°$

1．D

【详解】A 已知两角一边，三角形确定的，只有一解，

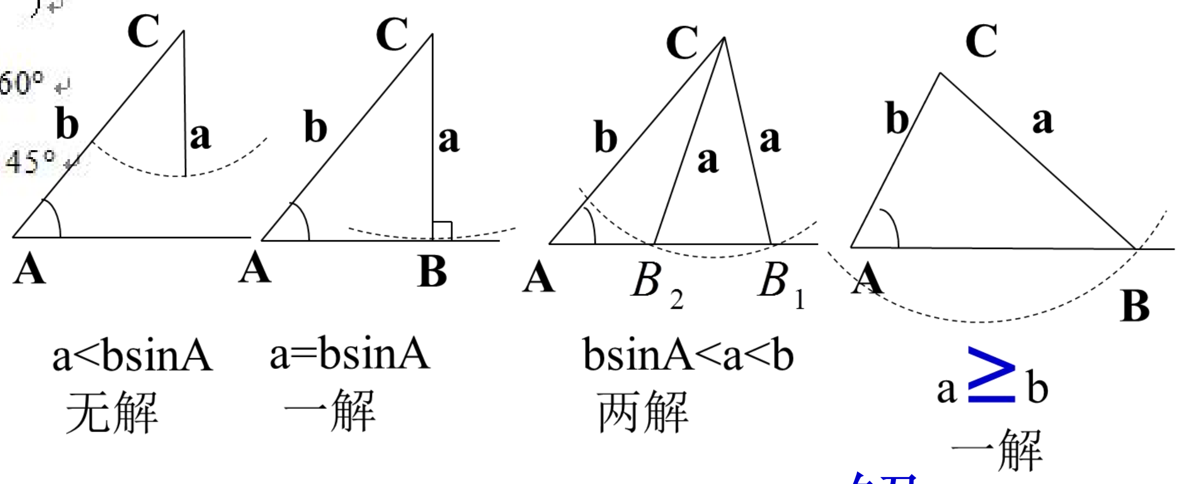
B 已知两边及夹角用余弦定理，只有一解，

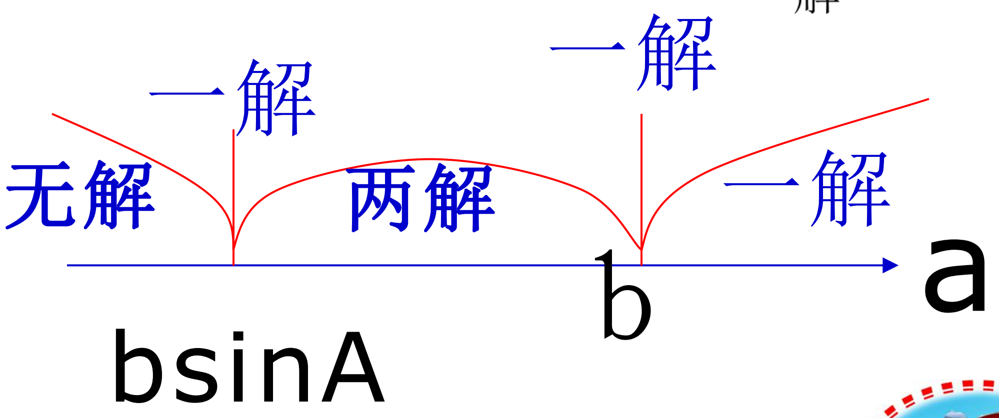
C 中已知两边及一边对角，但已知的是大边所对的角，

小边所对角只能是锐角，不可能有两解，

D 中，$b\sin A=16\sin 45°=8\sqrt{2}<a<b$，有两解．

已知两边和其中一边对角（锐角）解斜三角形





已知两边和其中一边对角解斜三

2．在ΔABC中，$AC=\sqrt{2},BC=2\sqrt{2}$，则B的取值范围是（　　）

A．$0<B\le\frac{\pi}{4}$　　B．$0<B\le\frac{\pi}{6}$

C．$0<B\le\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}\le B<\pi$　　D．$0<B\le\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}\le B<\pi$

解：设$AB=x$，则$\sqrt{2}<x<3\sqrt{2}$，

由余弦定理可得，$\cos B=\frac{x^2+8-2}{4\sqrt{2}x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(x+\frac{6}{x}\right)\ge\frac{1}{4\sqrt{2}}\times2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

根据余弦函数的性质可知，$0<B\le\frac{\pi}{6}$，故选 B.

3．在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，$A=2B$，则 $\cos B=(\ )$

A．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{6}$

解：∵在 $\triangle ABC$ 中 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，

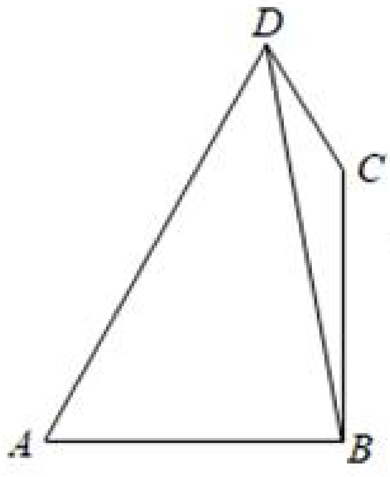
∴由正弦定理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B$①，

又∵ $A=2B$，∴$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$②，

由①②可得 $\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B=2\sin B\cos B$，可得 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{4}$，故选 B.

题型二：平面几何图形中应用正余弦定理

4．在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$AB=2$，$AD=3$，$AB\perp BC$.



（1）求 BD；

（2）若 $\angle BCD=150°$，求 CD.

解：（1）在三角形 ABD 中，由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=7$，

$\therefore BD=\sqrt{7}$.

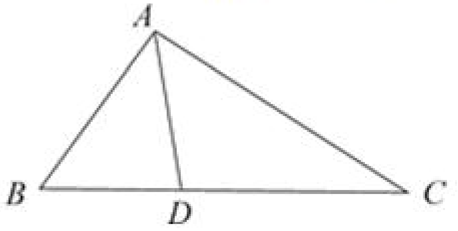
（2）由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{4+7-9}{2\times2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，

$\because AB\perp BC$，　　$\therefore \sin\angle CBD=\cos\angle ABD=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，

在$\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$，　即 $\dfrac{CD}{\frac{\sqrt{7}}{14}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}$，

解得 $CD=1$.

5．如图，在 ΔABC 中，点 D 在边 BC 上，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，$\sin B=2\sin C$．



（1）求 $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}$；

（2）若 $AB=1$，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求 $S_{\Delta ABC}$．

解：（1）因 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，令 $\angle BAD=\angle DAC=\alpha$

在 ΔABC 中，$\sin B=2\sin C$，由正弦定理，得 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{1}{2}$

所以 $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\alpha}=\dfrac{1}{2}$．

（2）因为 $AB=1$，所以 $AC=2$，又 $AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

由 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}=3S_{\Delta ABD}$，得 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha$

$1\times 2\times 2\sin\alpha\cos\alpha=1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，$\sin\alpha\neq 0$

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

(2) 法二：设 $BD=x$，$DC=2x$，

在 ΔABD 中，

$\cos B=\dfrac{1+x^2-\frac{4}{3}}{2x}$ ①

在 ΔABC 中，

$\cos B=\dfrac{1+9x^2-4}{2\cdot 3x}$ ②

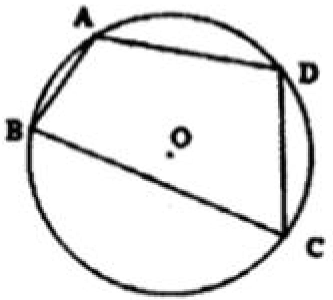
由①②知：$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

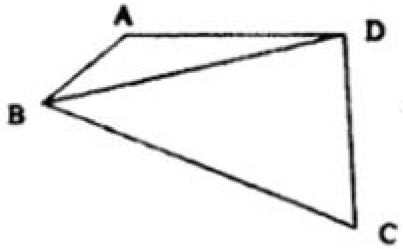
$\therefore BD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$DC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos B=0$．$B=\dfrac{\pi}{2}$．

$S=\dfrac{1}{2}\times 1\times BC=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

6．如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$AD=CD=4$．

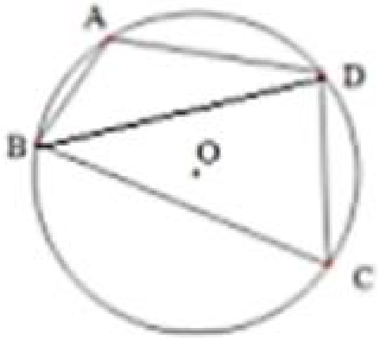




（1）当四边形 $ABCD$ 内接于圆 O 时，求四边形 $ABCD$ 的面积 S；

（2）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 BD 的长．

解：连接 BD，由余弦定理得



$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos A$$

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos C$$

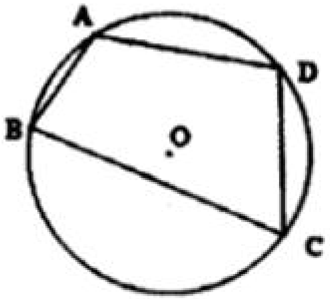
即 $20-16\cos A=52-48\cos C$．

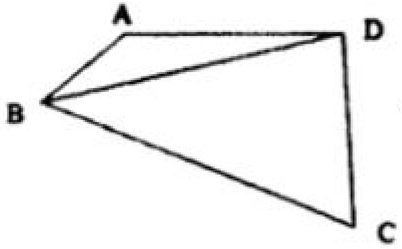
又四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，则又 $A+C=\pi$

所以 $20-16\cos A=52-48\cos(\pi-A)$ 化简得 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$

所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，同时有 $C=\dfrac{\pi}{3}$

6．如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$AD=CD=4$．





（1）当四边形 $ABCD$ 内接于圆 O 时，求四边形 $ABCD$ 的面积 S；

（2）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 BD 的长．

（2）设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则

$$S=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\sin C$$

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$$

即 $$\begin{cases}S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin A+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin C\\ 2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos A=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos C\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{S}{4}=\sin A+3\sin C\\ 2=3\cos C-\cos A\end{cases}$$

平方相加得：$\frac{S^2}{16}+4=10+6\sin A\sin C-6\cos A\cos C$

即 $\frac{S^2}{16}=6-6\cos(A+C)$　　又 $A+C\in(0,2\pi)$

当 $A+C=\pi$ 时，$\frac{S^2}{16}$ 有最大值，即 S 有最大值．

此时，$A=\pi-C$，代入 $2=3\cos C-\cos A$ 中得 $\cos C=\frac{1}{2}$

又 $C\in(0,\pi)$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$

在 $ABCD$ 中 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos\frac{\pi}{3}=28$

所以 $BD=2\sqrt{7}$

空中课堂

题型三：通过三角形中的边角互化来求有关量

7．已知 ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$\sin B+\sin C=\dfrac{1}{R}$（其中 R 为 ΔABC 的外接圆的半径）且 ΔABC 的面积 $S=a^2-(b-c)^2$．

（1）求 $\sin A$ 的值；

（2）求 ΔABC 的面积 S 的最大值．

解：（1）$\because S=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2bc$，则 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，

化简得 $\sin A+4\cos A=4$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore 0<\sin A\le 1$，

法一、构建二元二次方程组

由题意得 $\begin{cases}\sin A+4\cos A=4\\ \sin^2 A+\cos^2 A=1\\ 0<\sin A\le 1\end{cases}$，解得 $\sin A=\dfrac{8}{17}$，$\cos A=\dfrac{15}{17}$；

法二、对偶式构建二元一次方程组

令 $\cos A-4\sin A=t$

则 $\begin{cases}\sin A+4\cos A=4\\ \cos A-4\sin A=t\end{cases}$.

$t=1$ 时，不满足 $\cos A-4\sin A=1$．（舍）

$\therefore t=-1$

$\begin{cases}\sin A+4\cos A=4\\ \cos A-4\sin A=-1\end{cases}$.

法三、三角变换的灵活

$\sin A=4(1-\cos A)$

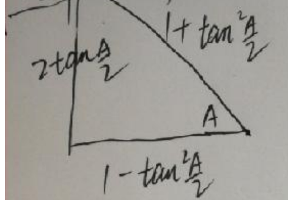
$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=4[1-(1-2\sin^2\frac{A}{2})]$

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}$

$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$

$\sin A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\dfrac{8}{17}$.

证明法



$\sin A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

推导法：

$\sin A=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}$

$\cos A=\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}$

万能公式

8．在△ABC 中，a、b、c 分别为三个内角 A、B、C 的对边，且 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{a^2}{3\sin A}$，$\cos B\cdot\cos C=\dfrac{1}{6}$．

（1）求角 A；

（2）若 $a=3$，求△ABC 的周长．

解：（1）由题意得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{a^2}{3\sin A}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，

$\therefore a^2=\dfrac{3}{2}bc\sin^2 A$，

$\therefore \sin^2 A=\dfrac{3}{2}\sin B\sin C\sin^2 A$，

$\therefore \sin B\sin C=\dfrac{2}{3}$，

$\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C=\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore B+C=\dfrac{2}{3}\pi$，

又 $A+B+C=\pi$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．

（2）由正弦定理，得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，

所以 $b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$

$\therefore bc=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin B\sin C=12\sin B\sin C=8$，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-24=9$，

$\therefore (b+c)^2=33$，即 $b+c=\sqrt{33}$，

$\therefore$ △ABC 的周长为 $3+\sqrt{33}$．

变：在ΔABC中 已知 $a=3$，$A=\frac{\pi}{3}$，求周长

变：在$\triangle ABC$中，已知 $a=3$，$A=\frac{\pi}{3}$，求周长

解：$\because 2R=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$.

$\therefore b+c=2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)$

$=2\sqrt{3}(\sin B+\sin(A+B))$

$=2\sqrt{3}(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B)$

$=6\sin(B+\frac{\pi}{6})$.

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，$\therefore B+C=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 0<B<\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore \frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\le 1$.

$\therefore 3<b+c\le 6$

$\therefore 6<a+b+c\le 9$

法二：由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

知：$9=(b+c)^2-3bc$.

$3bc=(b+c)^2-9\le 3\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

$\therefore (b+c)^2-9\le\frac{3}{4}(b+c)^2$

$\therefore (b+c)^2\le 36$

$0<b+c\le 6$.

又 $b+c>3$

$\therefore 3<b+c\le 6$.

$\therefore 6<a+b+c\le 9$

再变：求$\triangle ABC$的面积的取值范围.

跟踪练习 10．在 ΔABC 中，设角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，已知

$\cos^2 A=\sin^2 B+\cos^2 C+\sin A\sin B$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $c=\sqrt{3}$ ，求 ΔABC 周长的取值范围.

解：（1）由题意知 $1-\sin^2 A=\sin^2 B+1-\sin^2 C+\sin A\sin B$ ，

即 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=-\sin A\sin B$ ，

由正弦定理得 $a^2+b^2-c^2=-ab$

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{-ab}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$ ，

又 $\because 0<C<\pi,\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=2,\therefore a=2\sin A,b=2\sin B$ ，

则 ΔABC 的周长

$L=a+b+c=2(\sin A+\sin B)+\sqrt{3}=2\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\right]+\sqrt{3}=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$

.

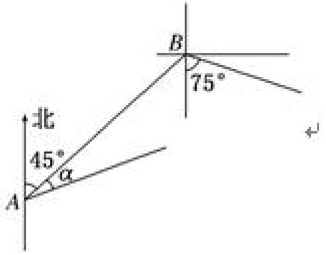
$\because 0<A<\dfrac{\pi}{3},\therefore\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3},\therefore\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1$ ，

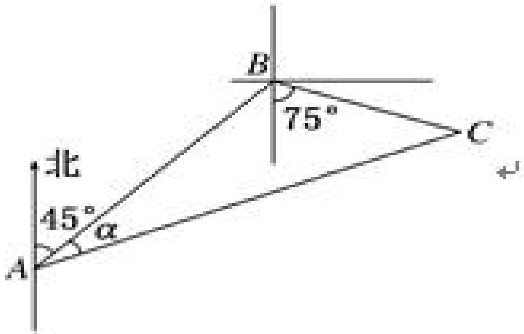
$\therefore 2\sqrt{3}<2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\le 2+\sqrt{3}$ ，

$\therefore \Delta ABC$ 周长的取值范围是 $\left(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$.

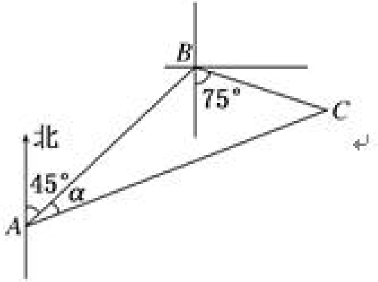
题型四：应用问题

9.在一次海上联合作战演习中，红方一艘侦察艇发现在北偏东 45° 方向，相距 12 n mile 的水面上，有蓝方一艘小艇正以每小时 10 n mile 的速度沿南偏东 75° 方向前进，若侦察艇以每小时 14 n mile 的速度，沿北偏东 45° ＋α 方向拦截蓝方的小艇．若要在最短的时间内拦截住，求红方侦察艇所需的时间和角 α 的正弦值．





如图，设红方侦察艇经过 x 小时后在 C 处追上蓝方的小艇，



则 $AC=14x$，$BC=10x$，$\angle ABC=120°$.

根据余弦定理得 $(14x)^2=12^2+(10x)^2-240x\cos 120°$，

解得 $x=2$.

故 $AC=28$，$BC=20$.

根据正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin 120°}$，

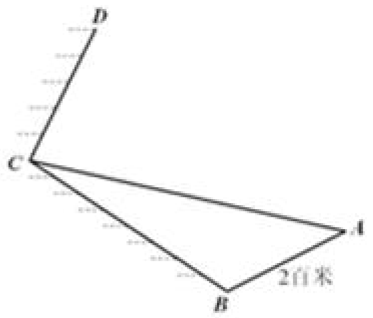
解得 $\sin\alpha=\dfrac{20\sin 120°}{28}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

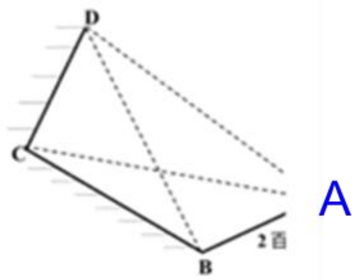
所以红方侦察艇所需要的时间为 2 小时，角 α 的正弦值为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

10．如图是一景区的截面图，AB 是可以行走的斜坡，已知 $AB=2$ 百米，BC 是没有人行路（不能攀登）的斜坡，CD 是斜坡上的一段陡峭的山崖.假设你（看做一点）在斜坡 AB 上，身上只携带着量角器（可以测量以你为顶点的角）.

（1）请你设计一个通过测量角可以计算出斜坡 BC 的长的方案，用字母表示所测量的角，计算出 BC 的长，并化简；

（2）设 $BC=3$ 百米，$AC=\sqrt{19}$ 百米，$\angle DBA=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAD=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求山崖 CD 的长.（精确到米）





解：（1）据题意，可测得 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，

在 ΔABC 中，由正弦定理，有 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

即 $\dfrac{2}{\sin\left[180^\circ-(\alpha+\beta)\right]}=\dfrac{BC}{\sin\alpha}$.

解得 $BC=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$（米）.

（2）解一：在 ΔABC 中，$AB=2$ 百米，

$BC=3$ 百米，$AC=\sqrt{19}$ 百米，

由余弦定理，可得 $\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，

解得 $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle ABC=120^\circ$.

又由已知，在 $Rt\Delta DBA$ 中，$\angle BAD=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

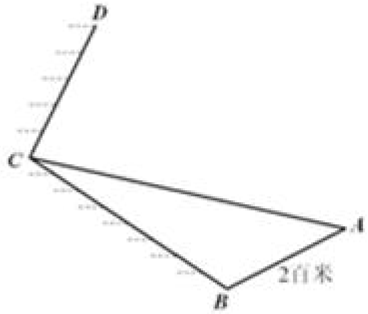
可解得 $\tan\angle BAD=2$，从而的 $BD=4$.

$\because \angle CBD=\angle ABC-\angle DBA=30^\circ$，

在 ΔBCD 中，由余弦定理得 $CD=\sqrt{BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos 30^\circ}\approx 205$ 米

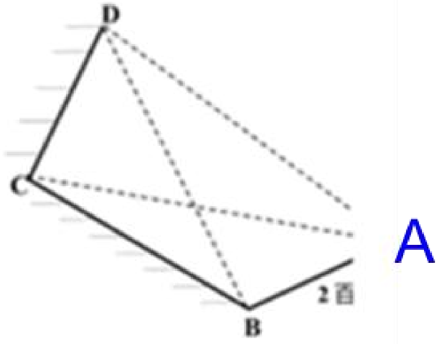
所以，CD 的长度约为 205 米.

10．如图是一景区的截面图，AB 是可以行走的斜坡，已知 $AB=2$ 百米，BC 是没有人行路（不能攀登）的斜坡，CD 是斜坡上的一段陡峭的山崖.假设你（看做一点）在斜坡 AB 上，身上只携带着量角器（可以测量以你为顶点的角）.



（1）请你设计一个通过测量角可以计算出斜坡 BC 的长的方案，用字母表示所测量的角，计算出 BC 的长，并化简；

（2）设 $BC=3$ 百米，$AC=\sqrt{19}$ 百米，$\angle DBA=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAD=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求山崖 CD 的长.（精确到米）



解二：（2）在 $Rt\Delta ABD$ 中，求得 $AD=2\sqrt{5}$.

在 ΔABC 中，由余弦定理，得 $\cos\angle CAB=\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$，

进而得 $\sin\angle CAB=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$，再由 $\angle DAB=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 可求得 $\cos\angle DAB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\angle DAB=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\cos\angle DAC=\cos(\angle DAB-\angle CAB)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{7}{2\sqrt{19}}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=\frac{7\sqrt{5}+6\sqrt{15}}{10\sqrt{19}}.$$

在 ΔACD 中，由余弦定理，得 $CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD}\approx 205$

所以，CD 的长度约为 205 米.

跟踪练习

4．在① $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，② $c\sin C=\sin A+b\sin B$，$B=60^{\circ}$，③ $c=2$，$\cos A=\dfrac{1}{8}$ 三个条件中任选一个补充在下面问题中，并加以解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=3$，______，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

答案不唯一，具体见解析

解：选①

$\because \cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin A=\dfrac{4}{5}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$，

由正弦定理得 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{3\times\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{33\sqrt{5}}{20}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{33\sqrt{5}}{20}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{99}{40}$.

跟踪练习

4．在① $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，② $c\sin C=\sin A+b\sin B$，$B=60^\circ$，③ $c=2$，$\cos A=\frac{1}{8}$ 三个条件中任选一个补充在下面问题中，并加以解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=3$，______，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

答案不唯一，具体见解析

选②

$\because c\sin C=\sin A+b\sin B$，

$\therefore$ 由正弦定理得 $c^2=a+b^2$.

$\because a=3$，$\therefore b^2=c^2-3$.

又 $\because B=60^\circ$，

$\therefore b^2=c^2+9-2\times3\times c\times\frac{1}{2}=c^2-3$，

$\therefore c=4$，

$\therefore S=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$.

选③

$\because c=2$，$\cos A=\frac{1}{8}$，

$\therefore$ 由余弦定理得 $\frac{1}{8}=\frac{b^2+2^2-3^2}{2b\times2}$，即 $b^2-\frac{b}{2}-5=0$，

解得 $b=\frac{5}{2}$ 或 $b=-2$（舍去）.

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times2\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

③ $\cos A=\frac{1}{8}$. $\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\frac{c}{\sin C}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$

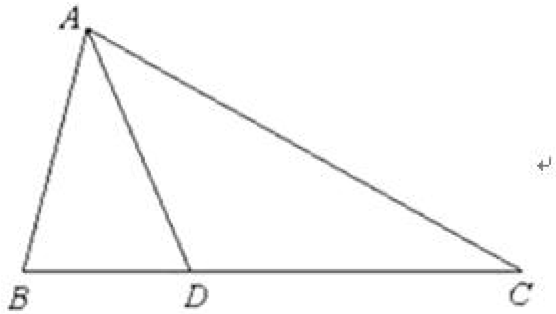
$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$. $\cos C=\frac{3}{4}$

$\sin B=\sin(A+C)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{15\sqrt{7}}{16}$

故答案为：选①为 $\frac{99}{40}$；选②为 $3\sqrt{3}$；选③为 $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

5.在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，满足 $c=3,\cos A=\frac{1}{4}$，AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $AD=\sqrt{10}$，则 $b=$______.



记 $A=2\theta$，因为 $\cos A=\frac{1}{4}=2\cos^2\theta-1$，所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，$\cos\theta=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$，代入数据，解得 $BD=2$，

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}=\frac{10+4-9}{2\times2\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{8},$$

$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，所以 $\cos\angle ADC=-\frac{\sqrt{10}}{8}$，$\sin\angle ADC=\frac{3\sqrt{6}}{8}$，

在 $\triangle ADC$ 中，$\sin C=\sin(\angle ADC+\theta)=\sin\angle ADC\cos\theta+\sin\theta\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

由正弦定理，$\frac{AD}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即 $\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{AC}{\frac{3\sqrt{6}}{8}}$，解得，$AC=6$，即 $b=6$.

6. 已知 ΔABC 中，$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，当 $\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right):\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right):\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=1:2:3$ 时，$\sin A$：$\sin B$：$\sin C$=_____.

由 $\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right):\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right):\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=1:2:3$，得 ΔABC 为锐角三角形，且

$$\left(-bc\cos A\right):\left(-ba\cos C\right):\left(-ac\cos B\right)=\left(bc\cos A\right):\left(ba\cos C\right):\left(ac\cos B\right)$$

$$=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right):\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right):\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)$$

$$=\left(b^2+c^2-a^2\right):\left(a^2+b^2-c^2\right):\left(a^2+c^2-b^2\right)=1:2:3.$$

设 $b^2+c^2-a^2=k,a^2+b^2-c^2=2k,a^2+c^2-b^2=3k\left(k>0\right)$，解得

$a^2=5k,b^2=3k,c^2=4k$，则 $a:b:c=\sqrt{5}:\sqrt{3}:2$.由正弦定理得

$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{5}:\sqrt{3}:2$.

故答案为：$\sqrt{5}:\sqrt{3}:2$

7．若长度为 x^2+4，$4x$，x^2+8 的三条线段可以构成一个钝角三角形，则 x 的取值范围是______．

解：$\because x^2+8>x^2+4\geq 4x>0$，可得 x^2+8 为最大边．

由于此三角形为钝角三角形，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{(x^2+4)^2+(4x)^2-(x^2+8)^2}{2\times\left(x^2+4\right)\times(4x)}<0$，化为：$x^2<6$，

$\therefore$ 由 $x>0$，解得 $x<\sqrt{6}$．

又 $\because x^2+4+4x>x^2+8$，解得：$x>1$，

$\therefore x$ 的取值范围为 $1<x<\sqrt{6}$．

故答案为：$1<x<\sqrt{6}$．

9．已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，S 为 $\triangle ABC$ 的面积，$\sin(B+C)=\dfrac{2S}{a^2-c^2}$．

（1）证明：$A=2C$；

（2）若 $b=2$，且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 S 的取值范围．

(1)证明：由 $\sin(B+C)=\dfrac{2S}{a^2-c^2}$，即 $\sin A=\dfrac{2S}{a^2-c^2}$，

$\therefore \sin A=\dfrac{bc\sin A}{a^2-c^2}$，$\sin A\neq 0$，$\therefore a^2-c^2=bc$，

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$，

$\therefore b^2-2bc\cos A=bc$，$\therefore b-2c\cos A=c$，

$\therefore \sin B-2\sin C\cos A=\sin C$，

$\therefore \sin(A+C)-2\sin C\cos A=\sin C$，$\therefore \sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C$，

$\therefore \sin(A-C)=\sin C$，

$\because A$，B，$C\in(0,\pi)$，$\therefore A=2C$．

(2)解：$\because A=2C$，$\therefore B=\pi-3C$，

$\therefore \sin B=\sin 3C$．

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 且 $b=2$，

$\therefore a=\dfrac{2\sin 2C}{\sin 3C}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2\sin 2C\sin C}{\sin(2C+C)}=\dfrac{2\sin 2C\sin C}{\sin 2C\cos C+\cos 2C\sin C}=\dfrac{2\tan 2C\tan C}{\tan 2C+\tan C}=\dfrac{4\tan C}{3-\tan^2 C}=\dfrac{4}{\dfrac{3}{\tan C}-\tan C}$，

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \begin{cases} A=2C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ B=\pi-3C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，

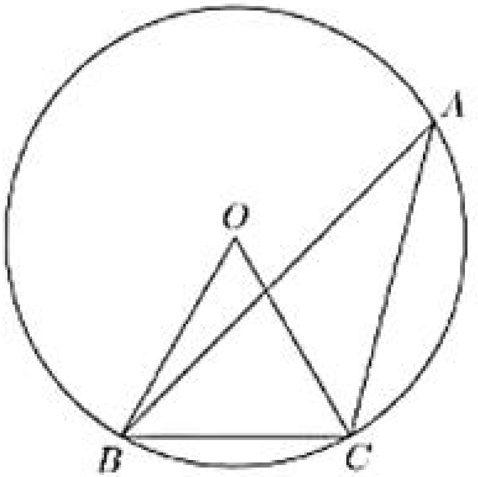
$\therefore C\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\therefore \tan C\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，

$\because S=\dfrac{4}{\dfrac{3}{\tan C}-\tan C}$ 为增函数，

$\therefore S\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$．

11．通常用 a、b、c 分别表示 ΔABC 的三个内角 A、B、C 所对的边长，R 表示 ΔABC 的外接圆半径．

（1）如图，在以 O 为圆心，半径为 2 的圆 O 中，BC、AB 是圆 O 的弦，其中 $BC=2$，$\angle ABC=45°$，角 A 是锐角，求弦 AB 的长；



（2）在 ΔABC 中，若 $\angle C$ 是钝角，求证：$a^2+b^2<4R^2$；

（3）给定三个正实数 a、b、R，其中 $b\le a$，问 a、b、R 满足怎样的关系时，以 a、b 为边长，R 为外接圆半径的 ΔABC 不存在、存在一个或存在两个（全等的三角形算作同一个）？在 ΔABC 存在的情况下，用 a、b、R 表示 c．

（1）$\because R=2, a=2$，$B=45°$

由正弦定理可得：$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{c}{\sin C}=4$，解得：$\sin A=\dfrac{1}{2}, b=2\sqrt{2}$

$\because a<b$，可得：$A<B$，可得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\therefore AB=c=4\sin C=4\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

（2）证明：由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\because C$ 为钝角，可得 $\cos C<0$，$\therefore a^2+b^2<c^2$

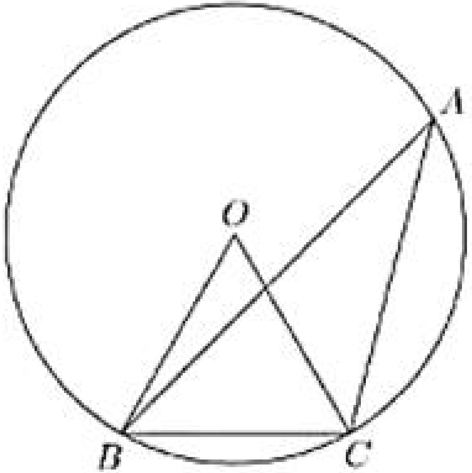
又由正弦定理得 $c=2R\sin C<2R$，$\therefore c^2<4R^2$ $\therefore a^2+b^2<4R^2$

11. 通常用 a、b、c 分别表示 ΔABC 的三个内角 A、B、C 所对的边长，R 表示 ΔABC 的外接圆半径.

（1）如图，在以 O 为圆心，半径为 2 的圆 O 中，BC、AB 是圆 O 的弦，其中 $BC=2$，$\angle ABC=45°$，角 A 是锐角，求弦 AB 的长；

（2）在 ΔABC 中，若 $\angle C$ 是钝角，求证：$a^2+b^2<4R^2$；

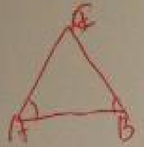
（3）给定三个正实数 a、b、R，其中 $b\le a$，问 a、b、R 满足怎样的关系时，以 a、b 为边长，R 为外接圆半径的 ΔABC 不存在、存在一个或存在两个（全等的三角形算作同一个）？在 ΔABC 存在的情况下，用 a、b、R 表示 c.



(3) ① 当 $a>2R$ 或 $a=b=2R$ 时. 所求的 ΔABC 不存在

② 当 $a=2R$ 且 $b<a$ 时. $\angle A=90°$. 所求的 ΔABC 只存在一个.
且 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

③ 当 $a<2R$ 且 $b=a$ 时. $\angle A=\angle B$. 且 A. B 都是锐角.
由 $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}=\sin B$, A. B 唯一确定.
因此. 所求的 ΔABC 只存在一个. 且 $c=2R\sin C$



$\sin C=\sin(\pi-2A)$
$=\sin 2A$
$=2\sin A\cos A$.

$\cancel{=2R\sqrt{1-\cos A}}$

$\therefore c=2R\cdot 2\sin A\cos A$
$=2a\cos A=2a\sqrt{1-\sin^2 A}$
$=2a\sqrt{1-\frac{a^2}{(2R)^2}}$
$=\frac{a}{R}\sqrt{4R^2-a^2}$

④ 当 $b<a<2R$ 时. $\angle B$ 总是锐角. $\angle A$ 可以是钝角也可以是锐角. 因∴所求的 ΔABC 存在两个.
由 $\sin A=\frac{a}{2R}$. $\sin B=\frac{b}{2R}$ 得.
当 $\angle A<90°$ 时. $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{a^2}{(2R)^2}}=\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$

$\cos A\cos B-\sin A\sin B$
$\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}\cdot\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}-\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}$

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(A+B)}$
$=\sqrt{a^2+b^2+\frac{ab}{2R^2}(\sqrt{4R^2-a^2}\cdot\sqrt{4R^2-b^2}-ab)}$

当 $\angle A>90°$ 时. $\cos A=-\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$.
$c=\sqrt{a^2+b^2-\frac{ab}{2R^2}(\sqrt{4R^2-a^2}\cdot\sqrt{4R^2-b^2}+ab)}$.

[常用结论]

1．三角形中的射影定理：在△ABC 中，

$a=b\cos C+c\cos B$；

$b=a\cos C+c\cos A$；

$c=b\cos A+a\cos B$.

2.在△ABC中,大角对大边,大边对大角,如:$a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow \sin A>\sin B$;

3.任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边;

4.在锐角三角形ABC中,$\sin A>\cos B\Leftrightarrow A+B>\dfrac{\pi}{2}$;

5.在斜△ABC中,$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$;

6.有关三角形内角的常用三角恒等式

:$\sin(A+B)=\sin C$;

$\cos(A+B)=-\cos C$;

$\tan(A+B)=-\tan C$; $\left(A+B\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$