高考评价体系研究

数列中的递推关系

张春华

新旧教材对于数列的考查也发生了一些变化，具体如下：

1.数列中的递推公式由选学变为必学。

2.新教材中添加了一节数列的应用。全国卷对学生的阅读能力有着广泛的考查，体现在数学学科的应用题最为明显。数列归根到底是特殊的函数，它与数学的其他知识有着千丝万缕的联系，近几年高考中也多出现数列和其他知识点的综合考察，数列与方程、函数的综合，数列与不等式，数列与解析几何等，所以在复习中也应该关注到有关数列的应用题。

3.新教材把数学归纳法这一节放在了数列章节中，作为数列的最后一节，这意味着数学归纳法与数列的紧密结合。

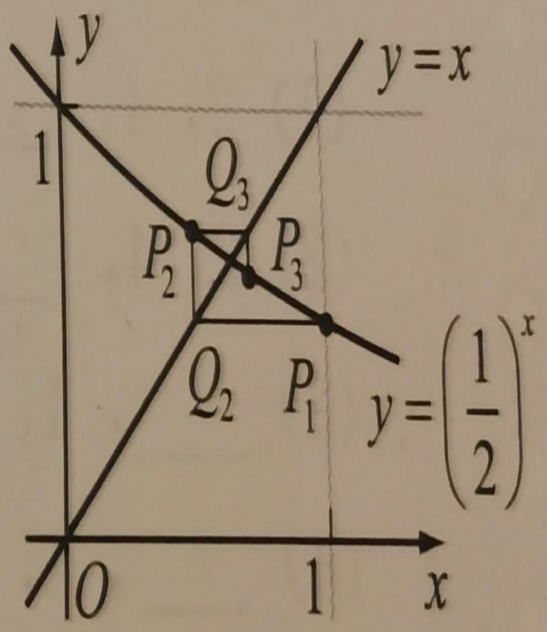
近几年一些地区的高考题或模拟题对利用不动点解决递推数列问题比较青睐（如2019浙江高考10题、2020山东高考模拟22题、2021潍坊高三期末考试12题、2021济南一模22题（与2017浙江22题），如利用不动点求数列通项，特别研究数列单调性以及数列收敛性，数学归纳法等等，大多是压轴小题或压轴解答题。

要回归课本，从课本中探寻高考命题的影子

对任何一个学生，即使是优秀学生，复习质量高低的关键都在于是否切实抓好基础。高考命题是源于教材，高于教材的，一定要抓住课本这个根本，建议同学们仔细梳理课本，重视教材中的基础知识和基本方法，然后加以引申、变化，做到举一反三。

能否判断 $\{a_n\}$ 的单调性

❹ 如图，已知直线 l：$y=x$ 与曲线 C：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，设 P_1 为曲线 C 上横坐标为 1 的点．过 P_1 作 x 轴的平行线交 l 于 Q_2，过 Q_2 作 x 轴的垂线交曲线 C 于 P_2；再过 P_2 作 x 轴的平行线交 l 于 Q_3，过 Q_3 作 x 轴的垂线交曲线 C 于 P_3……设点 P_1，P_2，…，P_n，…的纵坐标分别为 a_1，a_2，…，a_n，…，试求数列 $\{a_n\}$ 的前两项以及递推关系．



（第 4 题）

1　不动点的定义

数列可以看作定义在正整数集合上的函数，为了研究的方便，定义如下：

定义 1　对于函数 $f(x)$，若存在实数 x_0，使 $f(x_0) = x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

定义 2　设 $f: I \to R$，其中 I 是 R 的一个区间，数列 $\{x_n\}$ 由 $a_1 = a$ 和递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 来定义. 则数列 $\{x_n\}$ 称为递推数列，$f(x)$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的特征函数，$x = f(x)$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的特征方程，$x_1 = a$ 称为初始值.

2　运用不动点处理数列的单调性、收敛性的一些原理

若设 f 是连续的，若 $\{x_n\}$ 收敛而且有极限 x_0，则 $x_0 = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(x_0)$. 因此问题就变为寻找方程 $x = f(x)$ 的解（即 f 的不动点），并验证数列是不是收敛于数 x_0.

数列收敛且有极限，等价于寻求函数不动点并验证不动点是否为数列的极限

定义3 设f是定义在I上的函数，$f(I) \subset I$，若存在常数$k \in (0,1)$，使得对一切$x,y \in I$，$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$成立，则称$f$为$I$上的一个压缩映射，称常数$k$为压缩常数.

定理1 设f是$[a,b]$上的一个压缩映射，则由任何初始值$x_1 \in [a,b]$和递推数列$x_{n+1} = f(x_n)$，$n \in N^*$生成的数列$\{x_n\}$收敛.

证明：由于f是$[a,b]$上的一个压缩映射，故$f([a,b]) \subset [a,b]$，则$x_n \in [a,b]$，且$\exists k \in (0,1)$，使得$\forall n,p \in N^*$，有$|x_n - x_{n+p}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n+p-1})| \le k|x_{n-1} - x_{n+p-1}| \le k^2|x_{n-2} - x_{n+p-2}| \le \cdots \le k^{n-1}|x_1 - x_{p+1}| \le k^n|a - b|$. 于是，$\forall \varepsilon > 0$（不妨设$\varepsilon < b - a$），只要取$N = \left[\ln \dfrac{\varepsilon}{b-a} / \ln k\right]$，$\forall n,p \in N^*$，都有$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. 根据Cauchy收敛准则，$\{x_n\}$收敛.［证毕］

函数平均变化率的绝对值小于1，则函数是收敛函数

收敛函数生成的数列是收敛数列

定义4 在不动点 x_0 处，若 $|f'(x_0)|<1$，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的吸引不动点；若 $|f'(x_0)|>1$，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的排斥不动点.

定理2 若 $y=f(x)$ 是定义在 I 上的连续可导函数，x_0 是吸引不动点，则存在 x_0 的邻域区间 U，对一切 $x\in U$，都有 $|f'(x)|<1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=x_0$. 这里的记号 $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$.

证明：因为 $f(x)$ 连续可导，又 $|f'(x_0)|<1$，则这样的区间 U 显然存在.

对任意一点 $x\in U$，在 x，x_0 为端点的闭区间上，由拉格朗日中值定理得

$|f(x)-x_0|=|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi)||x-x_0|<|x-x_0|$

所以 $f(x)\in U$. 由定理1可得数列 $\{f^n(x)\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x)=x_0$. [证毕]

定理表明吸引不动点在迭代过程中，可以吸引周边的点. 下面研究数列 $\{x_n\}$ 将以何种方式收敛于 x_0.

定理 3 若 $y=f(x)$ 是定义在 I 上的连续可导函数，只有一个不动点 x_0，且为吸引不动点，初始值 $x_1 \neq x_0$，递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n \in N^*$，则(1) 当 f 在 I 上递增时，则数列 $\{x_n\}$ 单调且收敛于 x_0；(2) 当 f 在 I 上递减时，则 $\{x_n\}$ 的两个子列的 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 一递增一递减，且收敛于 x_0。

证明：(1) 当 f 在 I 上递增时，若 $f(x_1)=x_2>x_1$，则由数学归纳法可证明 $x_{n+1}=f(x_n)>f(x_{n-1})=x_n$，$\{x_n\}$ 递增；若 $f(x_1)=x_2<x_1$，则由数学归纳法可证明 $x_{n+1}=f(x_n)<f(x_{n-1})=x_n$，$\{x_n\}$ 递减。

(2) 当 f 在 I 上递减时，此时复合函数 $f[f(x)]$ 递增，而子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 中有一个递增，另一个递减。若 $x_3>x_1$，用数学归纳法可证明 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递增。事实上，若 $x_{2k-1}<x_{2k+1}$，则 $x_{2k}=f(x_{2k-1})>f(x_{2k+1})=x_{2k+2}$，$x_{2k+1}=f(x_{2k})<f(x_{2k+2})=x_{2k+3}$，由此可得 $\{x_{2k}\}$ 单调递减；若 $x_3<x_1$，证明类似。[证毕]

定理4 若$y=f(x)$是定义在I上的连续可导函数，有且只有两个不动点$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$且$f'(\alpha)\neq 1,f'(\beta)\neq 1$，异于$\alpha,\beta$的初始值$x_1$，递推数列$x_{n+1}=f(x_n),n\in N^*$，则两个不动点$\alpha,\beta$至多只有一个吸引不动点.

证明： 设函数$g(x)=f(x)-x$，则$g'(x)=f'(x)-1$. 假设两个不动点α,β同为吸引不动点，则$|f'(\alpha)|<1,|f'(\beta)|<1$，从而$g'(\alpha)<0,g'(\beta)<0$. 又$g(\alpha)=g(\beta)=0$，可得$\forall\varepsilon>0,\exists U_+^0(\alpha,\varepsilon)$使得$g'(x)<0$，则$\exists a\in U_+^0(\alpha,\varepsilon),g(a)<g(\alpha)=0$，同理$\exists b\in(\beta-\varepsilon,\beta)$使得$g(b)>0$. 由$g(x)$连续及零点存在定理，得$g(x)$在区间$(a,b)$上必有一个零点. 这与$g(x)$仅有两个零点矛盾. 因此假设不成立，则两个不动点$\alpha,\beta$至多一个为吸引不动点. [证毕]

定理5 若$y=f(x)$是定义在I上的连续可导的凸函数，有且只有两个不动点$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，且$\alpha,\beta$中有一个吸引不动点$f'(\alpha)\neq 1,f'(\beta)\neq 1$. 异于$\alpha,\beta$的初始值$x_1$，递推数列$x_{n+1}=f(x_n),n\in N^*$，则$\alpha$为吸引不动点，$\beta$为排斥不动点，且当$x_1<\alpha$时，$\{x_n\}$单调递增且收敛于$\alpha$；当$\alpha<x_1<\beta$时，$\{x_n\}$单调递减且收敛于$\alpha$；当$x_1>\beta$时，$\{x_n\}$单调递增且不收敛；

证明：由$y=f(x)$为凸函数，可得$f'(x)$为增函数. 由$\alpha<\beta$且中有一个吸引不动点及定理4得$f'(\alpha)<1<f'(\beta)$，即α为吸引不动点，β为排斥不动点. 构造函数$g(x)=f(x)-x$，则$g'(x)=f(x)-1$为增函数且$g'(\alpha)<0,g'(\beta)>0$,. 于是$\exists\bar{x}\in(\alpha,\beta)$，使得$g'(\bar{x})=0$，于是$g(x)$在$(-\infty,\bar{x})$上递减，在$(\bar{x},\beta)$上递增. 下面分四种情况进行说明：

(1) 当$x_1<\alpha$时，$g(x_1)>g(\alpha)=0$即$f(x_1)>x_1$，所以$x_2>x_1$，结合数学归纳法易证$\{x_n\}$单调递增且收敛于α；

(2) 当$\alpha<x_1<\bar{x}$时，$g(x_1)\leqslant g(\alpha)=0$即$f(x_1)<x_1$，所以$x_2<x_1$，结合数学归纳法易证$\{x_n\}$单调递减且收敛于$\alpha$；

(3) 当$\bar{x}<x_1<\beta$时，$g(x_1)<g(\beta)=0$即$f(x_1)<x_1$，所以$x_2<x_1$，结合数学归纳法易证$\{x_n\}$单调递减且收敛于α；

(4) 当$x_1>\beta$时，$g(x_1)>g(\beta)=0$即$f(x_1)>x_1$，所以$x_2>x_1$，结合数学归纳法易证$\{x_n\}$单调递增且不收敛.

综上，当$x_1>\beta$时，$\{x_n\}$单调递增且不收敛；当$\alpha<x_1<\beta$时，$\{x_n\}$单调递减且收敛于α；当$x_1<\alpha$时，$\{x_n\}$单调递增且收敛于α.［证毕］