

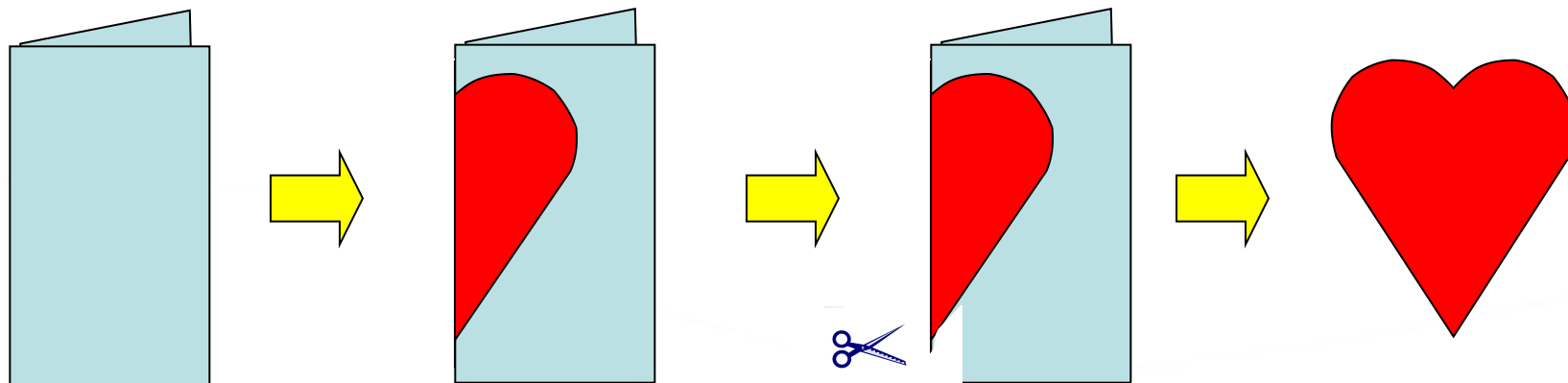
# 函数的奇偶性（一）

## 课堂教学（讲课）



# 情境引入 复习旧知

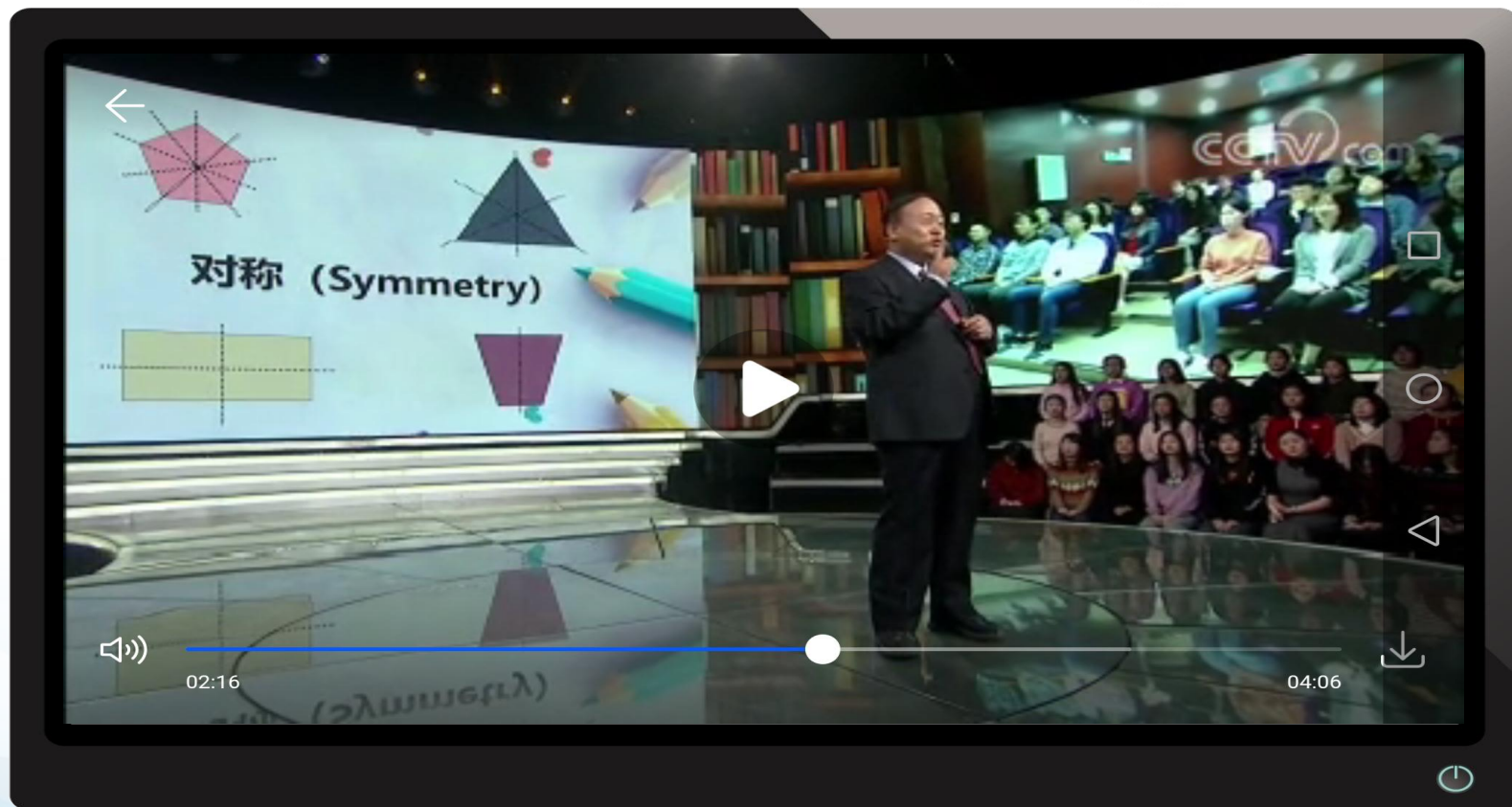
## 剪一剪




问题1：所得的图形具有什么特点呢？

开讲啦

中国科学院院士张继平  
《Symmetry 数学中的对称之美》





问题2: 点 $(x, y)$ 关于 $y$ 轴的对称点?

问题3: 点 $(x, y)$ 关于原点的对称点?

# 画图操作 直观感知

## 尝试发现：

填写下表，并画出其函数图像。

x	-3	-2	-1	1	2	4
$f(x) = x^2$						
$f(x) = \frac{1}{ x }$						

问题4: 观察 $f(x) = x^2$ 和 $f(x) = \frac{1}{|x|}$ , 你能得到哪些结论?

定义域、单调性、值域、对称性

## 探究关系 刻画对称

问题5: 尝试改变函数 $f(x) = x^2$ 和 $f(x) = \frac{1}{|x|}$ 的定义域

观察函数图象的对称性变化情况?

$$\forall x \in D, -x \in D$$

定义关于原点对称是图象关于y轴对称的**必要不充分条件**

问题6: 以函数 $f(x) = x^2$ 为例, 你能用数学符号语言描述“函数图象关于 $y$ 轴对称”吗?

$$f(-x) = f(x)$$

动态演示: 几何画板

## 问题7: 你能给出偶函数的定义吗?

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果对  $D$  内的任意一个  $x$ , 都有  $-x \in D$ , 且

$$f(-x) = f(x)$$

则称  $y = f(x)$  为偶函数.

1. 任意性:  $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

2. 等价性:  $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(-x) - f(x) = 0$

3. 对称性: 定义域、图像

问题8: 你能根据偶函数的定义, 列举几个偶函数的例子吗?

$$y = x^4 \quad y = x^6 \quad y = x^8 \dots$$

$$y = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

**2n偶数, 偶函数**

## 归纳类比 建构概念

问题9：请你类比偶函数概念的建构过程，思考并讨论以下问题：

思考一： $f(x) = x^3$ 和 $f(x) = \frac{1}{x}$ 图象有什么共同特征？

思考二：如何用数学符号语言描述函数图象的这个特征？

## 问题10: 你能给出奇函数的定义吗?

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$ , 如果对 $D$ 内的任意一个 $x$ , 都有 $-x \in D$ , 且

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

1.任意性:  $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

2.等价性:  $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0$

3.对称性: 定义域、图像

问题11: 你能根据奇函数的定义, 列举几个奇函数的例子吗?

$$y = x^1 \quad y = x^3 \quad y = x^5 \dots$$

$$y = x^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

**2n-1 奇数, 奇函数**

$$y = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

**2n偶数，偶函数**

$$y = x^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

**2n-1奇数，奇函数**

问题11: 当 $n$ 为整数时，上述结论是否成立？

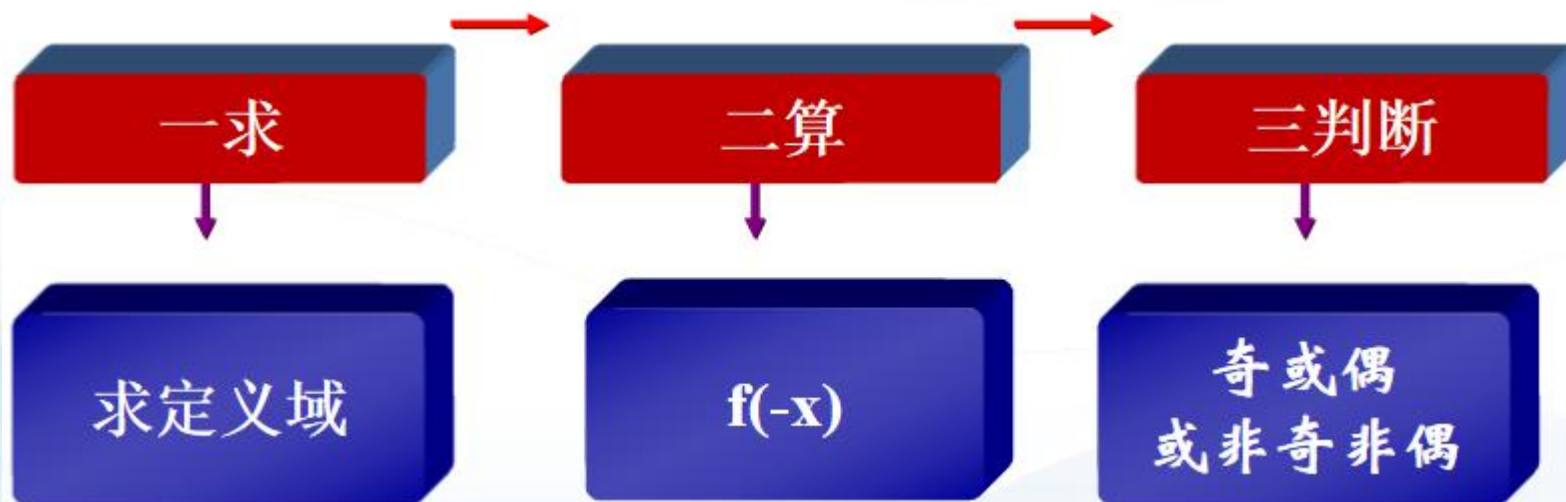
## 典例示范 深化理解

例1 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1)  $f(x) = x + x^3 + x^5$       (2)  $f(x) = x^2 + 1$

(3)  $f(x) = x + 1$       (4)  $f(x) = x^2, x \in [-1, 3]$

口诀：一求                  二算                  三判断



## 例2

- (1) 判断函数 $f(x) = x^3 + x$ 的奇偶性
- (2) 下图是 $f(x) = x^3 + x$ 的图象的一部分，你能根据 $f(x)$ 的奇偶性画出它在 $x$ 轴左边的图象吗？
- (3) 一般地，如果知道 $y = f(x)$ 为偶（奇）函数，那么我们可以怎样简化对它的研究？

# 总结提升 形成体系

问题12：结合所学知识和知识的探究过程谈谈本节课你有什么收获？



## 作业布置 课下探究

**必做：** 课本p109 练习A第1,2题

**选做：** 课本p110 练习B第2,3题

### **研究性作业：**

- 1.如果一个函数是奇函数，那么其值域具有什么特点？
- 2.怎样证明一个函数的图像关于 $x=1$ 对称，一般地，怎样证明函数的图像关于 $x=a$ 对称？



**敬请指导!**